Dispersion du son dans les tuyaux étroits.
Conséquences sur l'harmonicité de leurs modes propres

Bb Ninob, Juillet 2009

Il est connu depuis Kirchhoff que le son ne se propage pas tout à fait de la même façon en milieu libre et dans les tuyaux, surtout s'ils sont étroits. On se propose ici d'examiner quelles en sont les conséquences sur le comportement acoustique des instruments à vent.

La raison principale de la différence de comportement des ondes sonores en milieu libre et dans les tuyaux est le transfert de chaleur entre la colonne d'air (visqueux) et la paroi lors des compressions-dilatations de l'air associées à la propagation de l'onde sonore. Ceci se traduit physiquement par un amortissement du son lors de sa propagation dans les tuyaux, ainsi que par une vitesse de propagation dépendant de la fréquence. Ces effets dissipatifs et dispersifs sont d'autant plus prononcés que le tuyau est plus étroit. Mathématiquement, on les traduit en introduisant une constante de propagation du son complexe et dépendant de la fréquence (formule de Kirchhoff, ref. Mason, Proc. Roy. Soc) :

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}} - i.\frac{\alpha}{\sqrt{\omega}}\right)$$

où c est la vitesse du son en milieu libre, et où le paramètre α dépend des caractéristiques (périmètre et section) du tube :

$$\alpha = \frac{\text{Périmètre}.\gamma'}{2.S.\sqrt{2\rho_A}}$$

On notera au passage que le paramètre alpha dépend de la section S du tuyau ainsi que de son périmètre (ou encore, si l'on préfère, de son diamètre et de sa rugosité. On verra plus loin que la rugosité joue en effet un rôle important).
Ici, le paramètre γ' ne dépend que des caractéristiques de l'air (viscosité η, rapport des chaleurs spécifiques γ) :

$$\gamma' = \sqrt{\eta}(1 + 1.581(\sqrt{\gamma} - 1/\sqrt{\gamma}))$$

La valeur numérique de γ' est 6.51 e-3 en unités SI, ce qui donne pour un tube cylindrique lisse de diamètre moyen 13 mm résonant à 2500 rd/s un paramètre $\frac{\alpha}{\sqrt{\omega}}$ de 1.3 e-2. On attend donc un effet de l'ordre du pourcent sur la justesse des partiels d'un tel tuyau. Mais voyons les choses en détail.

La constante de propagation k étant complexe, les quantités p (pression acoustique) et w (débit acoustique) des champs sonores le sont aussi. Les grandeurs physiques pression et débit sont en fait les parties réelles de p et w.

Pour un tube cylindrique, ces champs sonores s'écrivent :

$$p(x,t) = (A.e^{ikx} + B.e^{-ikx}).e^{i\omega t}$$

$$w(x,t) = \left(-\frac{S0}{i\omega\rho_A}\right).ik\left[A.e^{ikx} - B.e^{-ikx}\right].e^{i\omega t}$$

Pour un tube cylindrique de longueur L, ouvert aux deux bouts, les résonances ont lieu pour des fréquences telles que :

$\tan(k_r.L) = 0$, ou encore $k_r = \frac{n.\pi}{L}$, où k_r est la partie réelle de la constante de propagation :

$k_r = \frac{\omega}{c}(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\omega}})$.

Ces deux dernières équations donnent l'expression des pulsations de résonance du tuyau :

$$\omega_n + \alpha.\sqrt{\omega_n} = \frac{n.\pi.c}{L}$$

La résolution de cette équation du second degré donne pour $\alpha << \sqrt{\frac{n.\pi.c}{L}}$:

$$\omega_n \approx \frac{n.\pi.c}{L}(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{n.\pi.c}{L}}}).$$

Cette expression permet de constater que les pulsations de résonance sont abaissées dans les tuyaux étroits par rapport à ce qu'elles seraient si on négligeait la dispersion. Cet abaissement n'est pas le même pour tous les modes, ce qui perturbe l'harmonicité des modes du tuyau. Les rapports de fréquence entre les modes sont :

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} \approx \frac{n}{m}\left(1+\alpha.\sqrt{\frac{L}{\pi.c}}(\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{n}})\right).$$

Le terme correctif étant positif, les intervalles entre partiels sont donc élargis par la dispersion du son. Sur la plupart des flûtes, l'effet est faible. Par exemple, pour une flûte cylindrique de 20 mm de diamètre et de 40 cm de longueur, le rapport des pulsations entre les deux premiers modes $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ vaut 2(1+0.0025), ce qui signifie que l'octave est perturbée de 0.25 %, soit environ 4 cents. Pas de quoi fouetter un chat, on peut négliger l'effet de la dispersion du son dans la conception de l'instrument sans passer à côté de la justesse. Mais dans le cas des clarinettes, et plus encore des cuivres (tuyaux longs et étroits), l'effet peut être plus important.

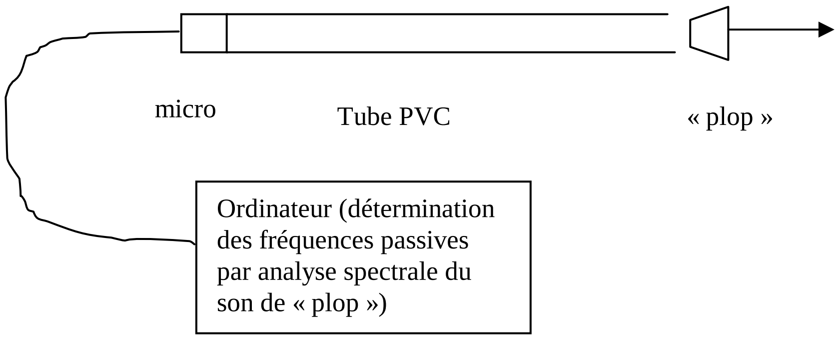
Considérons maintenant le cas d'un tuyau cylindrique ouvert à un bout, fermé à l'autre : les antirésonances du système ont lieu à des fréquences telles que $\tan(k_r.L) = \infty$, c'est à dire pour $k_r = \frac{(2n-1).\pi}{2L}$. Les pulsations correspondant aux modes de ce système s'écrivent :

$$\omega_n \approx \frac{(2n-1).\pi.c}{2L}(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{(2n-1).\pi.c}{2L}}})$$

Les rapports de fréquence entre modes sont :

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} \approx \frac{2n-1}{2m-1}\left(1+\alpha.\sqrt{\frac{2L}{\pi.c}}(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}})\right).$$

Dans le cas d'une clarinette (diamètre 15 mm, longueur 60 cm), le rapport de fréquence entre les deux premiers modes est $\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 3.(1+0.0055)$. Le célèbre intervalle de douzième typique des clarinettes est ici élargi de 0.55 %, soit 10 cents. Là encore, rien de dramatique, mais l'effet devient sensible. J'ai pu vérifier le bien fondé de ces élucubrations théoriques au moyen d'une petite expérience de mesure des fréquences de résonance passives d'un tube cylindrique lisse, long et étroit, fermé à un bout par un micro électret, et excité par un débouchage brusque du bout ouvert (il s'agit là d'une variante de la méthode des sons slappés ; le son produit ici est plus puissant). Le spectre du son enregistré par le micro peut être analysé, et les fréquences de résonance passives du tube peuvent en être déduites.

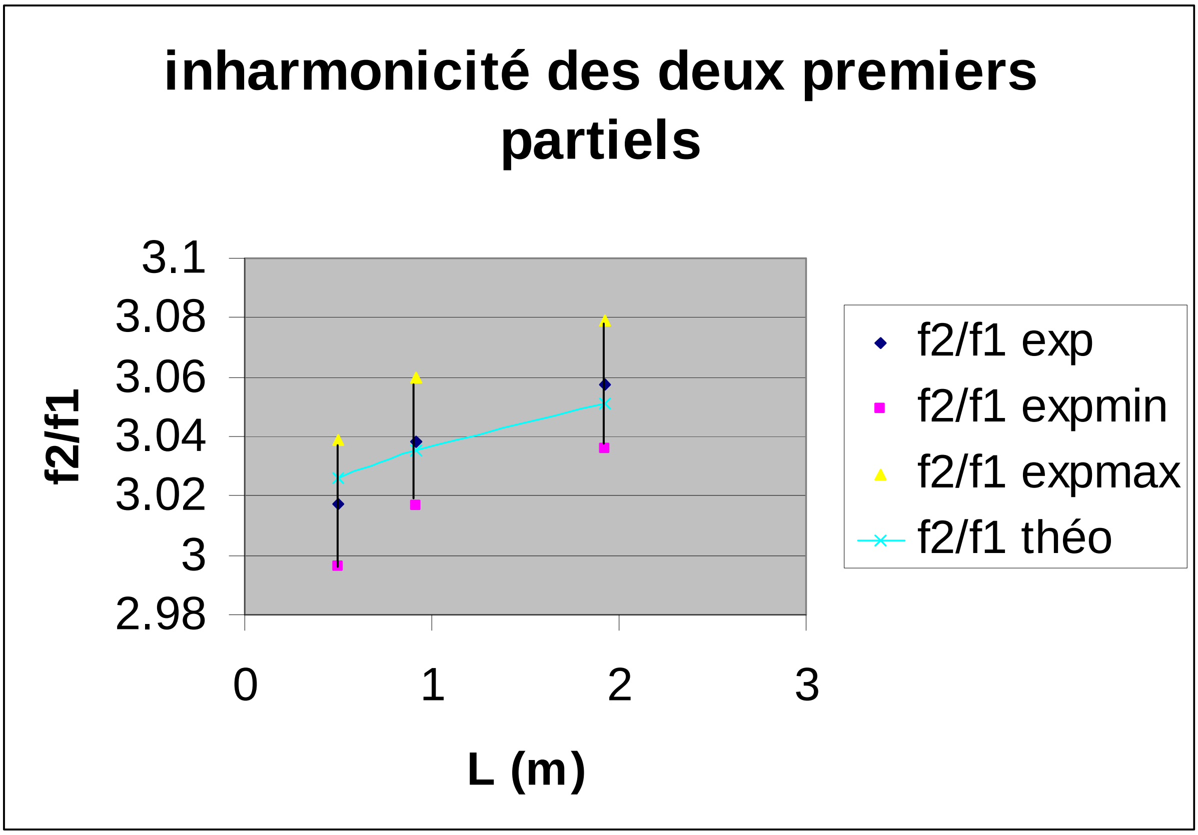


Le principe de la méthode de détermination des fréquences passives du tube

Les résultats trouvés pour les fréquences de résonance sont consignés dans le tableau suivant :

Longueur du tube (phi 13)	f1 (Hz)	f2 (Hz)	f3 (Hz)
1.930	43.5	133	223
0.92	91.5	278	465
0.50	172	519	865

L'incertitude relative sur les fréquences mesurées par cette méthode est de l'ordre de 0.5%.
On constate effectivement des intervalles entre partiels plus grands que les rapports 1/3/5 attendus en l'absence d'effets dispersifs. Sur le tuyau le plus long (1.93 m), l'écart de justesse de f2/f1 mesuré expérimentalement est de 3%+- 0.7%, en bon accord avec la prédiction théorique. L'accord théorie-expérience est du même ordre pour l'écart de justesse du 3ème partiel.



L'inharmonicité des deux premiers partiels d'un tuyau PVC de diamètre 13 mm fermé à un bout, en fonction de la longueur du tuyau.

La dispersion est particulièrement sensible pour les cuivres : l'effet est plus important pour les tuyaux longs (l'inharmonicité est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du tuyau), et pour les tuyaux étroits (l'inharmonicité est proportionnelle à α, elle même proportionnelle au diamètre du tube). Pour un trombone comportant 3m de tuyau de diamètre 13 mm, les défauts d'harmonicité entre les partiels inférieurs peuvent atteindre facilement le %, soit 20 cents. Cet effet plutôt compliqué doit être pris en compte par le facteur de cuivres dans la conception de ses instruments. Le logiciel TUTT fait ça très bien !

Cette petite étude permet peut être d'expliquer en partie pourquoi les instruments en cuivre vieillissent : l'intérieur du tuyau (rarement nettoyé, jamais poli !) s'oxyde avec l'âge, et voit sa rugosité augmenter. Outre le fait que l'amortissement associé est nuisible à l'auto-entretien (cf un article précédent sur dissipation et rugosité), la dispersion décrite dans cet article augmente avec la rugosité, et détruit l'harmonicité entre partiels. Or, cette harmonicité est cruciale, non seulement pour la justesse mais aussi pour l'émission du son. Militaires, ce n'est pas l'extérieur de vos instruments qu'il faut passer au Miror, c'est l'intérieur !