

Couplage tube-jet dans les embouchures de flûte

BB. Ninob, Septembre 2016

Résumé

Pour décrire le fonctionnement des flûtes et, en particulier la fréquence en jeu, il est a priori nécessaire de prendre en compte le couplage entre le jet d'air et le résonateur constitué par le tube de la flûte. Ce couplage est sans doute faible du fait de la petite valeur des paramètres d'oscillateur du jet, mais sa prise en compte ne reste pas moins essentielle si on veut décrire finement le comportement de l'instrument, puisque c'est en faisant varier les caractéristiques du jet d'air que l'instrumentiste règle la justesse, le volume, le timbre, etc...

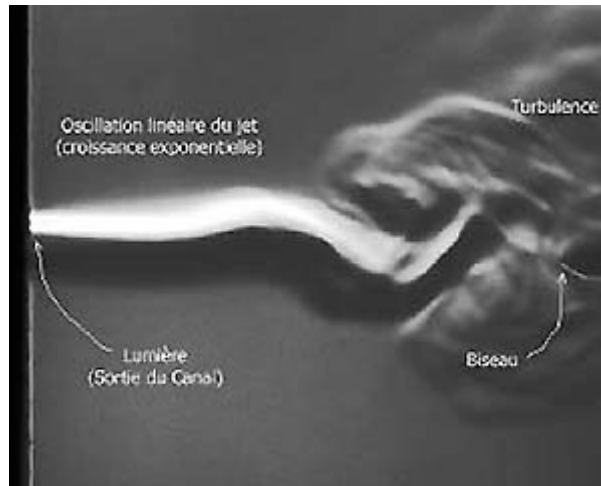
Afin de rendre compte de ce couplage, on modélise ici le jet d'air de l'embouchure de flûte comme une anche aérienne, où le jet ressemble à une lame souple encastrée, capable de mouvements transverses à son plan, et dotée d'une masse et d'une raideur calculables en fonction des dimensions et de la vitesse du jet. Dans le modèle présenté ici, le mouvement du jet est couplé au mouvement acoustique de l'air dans le tube de la flûte par une prescription de conservation du débit transversal au niveau de l'embouchure. Les fréquences en jeu de l'ocarina ou de la flûte, calculées comme étant les fréquences propres du système couplé jet-résonateur, dépendent alors des paramètres du jet, en particulier de sa longueur et de sa vitesse. Les fréquences prédites reproduisent bien l'expérience, y compris dans leur dépendance à la vitesse du jet. Il semble que le flûtiste ajuste approximativement la fréquence propre du jet à celle du résonateur pour le partiel qu'il souhaite exciter : de ce fait, le « frequency pulling » induit par le couplage jet-résonateur est faible et a des conséquences limitées sur la justesse, sauf aux deux extrémités de la tessiture. Cependant, le présent modèle couplé améliore un peu la prédiction des fréquences en jeu et la compréhension des champs de liberté de la flûte.

Introduction

Il est généralement admis que le tuyau impose la hauteur du son produit par une flûte. Et de fait, la plupart des calculs de fréquence des flûtes se limitent à calculer les fréquences passives du résonateur. L'accord théorie expérience ainsi obtenu est déjà correct, mais le modèle ne rend pas compte du fait que le son monte quand on augmente la vitesse du jet, ce qui montre bien que ce dernier exerce une certaine influence sur les fréquences en jeu. Pour décrire cela, il faut coupler le jet au résonateur. L'objet de cet article est l'étude de ce couplage.

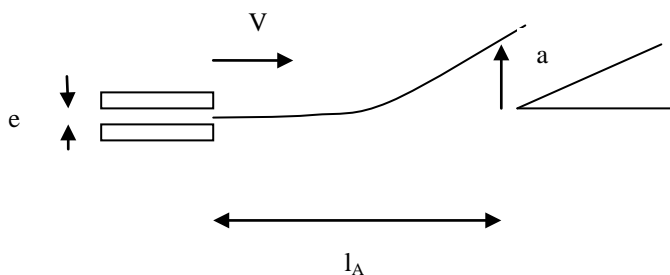
Le jet comme un oscillateur à un degré de liberté

Depuis les travaux de Zéphirin Carrière [1], on sait que le jet d'air au niveau de l'embouchure de la flûte oscille de façon compliquée, avec création de méandres puis de tourbillons alternés de part et d'autre du biseau.



Le jet en interaction avec le biseau (image tirée du cours de E. Kierlik à l'UPMC)

Dans le modèle présenté ici, on simplifie la description du jet en le réduisant à un oscillateur à un seul degré de liberté : le jet est assimilé à une lame souple encastrée, dotée d'une masse dépendant de ses dimensions et d'une raideur dépendant de sa vitesse. La description du jet d'air d'une flûte comme une anche aérienne analogue à un ressort capable d'oscillations transverses n'est pas déraisonnable, car le jet d'air est déplacé transversalement par un obstacle, et tend à revenir à sa position originelle si l'obstacle disparaît, comme le ferait un ressort constitué d'une lame encastrée. Même si la force de rappel est ici d'origine inertielle et non élastique, l'analogie du ressort reste pertinente dans la mesure où le déplacement du jet est proportionnel à la force transverse qui s'exerce sur lui.



Le schéma du jet se brisant sur le biseau, vu comme une anche simple encastrée.

La masse de la portion du jet comprise entre la sortie du canal et le biseau est $M_A = \rho.e.g.l_A$, où e est l'épaisseur du jet d'air, l_A sa longueur, g sa largeur et ρ la densité de l'air.

La force qui doit être exercée sur le jet pour le dévier d'une distance a par rapport à son axe est

$$F = \frac{2M_A.V^2}{l_A^2}.a, \text{ où } V \text{ est la vitesse du jet d'air.}$$

On peut donc définir la raideur du jet comme $K_A \equiv F/a = \alpha^2.V^2.\rho.e.g.l_A^{-1}$ (1)

où α est un paramètre qui vaut $\sqrt{2}$ selon le présent modèle, mais qu'on se réserve le droit de choisir à une valeur légèrement différente pour améliorer l'accord théorie-expérience sans trahir l'esprit du modèle.

On peut donner des ordres de grandeur de M_A et K_A pour un jet de flûte ($M_A=10^{-7}$ kg, $K_A=1$ N.m⁻¹), et les comparer aux paramètres d'oscillateur d'une anche solide typique en roseau ($M_A=10^{-4}$ kg ; $K_A=10^3$ N.m⁻¹) ; Dans la pratique, ces paramètres plus petits de trois ordres de grandeur font de l'anche aérienne une anche faible, au niveau de laquelle on aura (presque) un ventre de vitesse et un nœud de pression : contrairement aux instruments à anche solide, la flûte se comporte donc pratiquement comme un tube ouvert aux deux bouts.

La pulsation propre de la lame d'air est

$$\omega_A = \sqrt{K_A / M_A} = \alpha V / l_A \quad (2).$$

Comme on le verra plus loin sur des exemples numériques, cette pulsation propre semble proche des pulsations en jeu pour toutes les flûtes, du piccolo à la grande basse, y compris les ocarinas, au moins dans la partie centrale de la tessiture de ces instruments.

Autooscillation d'un jet d'air et fréquence de production de tourbillons

A ceux qui douteraient de la pertinence de cette description du jet et de la notion même de fréquence propre du jet, on peut répondre par l'existence avérée de sons de biseau [2], qui possèdent une fréquence bien définie et proportionnelle à la vitesse du jet. D'ailleurs, un jet d'air rencontrant un obstacle émet du bruit, et le spectre de ce bruit possède une fréquence de coupure proportionnelle au rapport V / l_A (cf les expériences classiques de Strouhal sur les fils chantants [3]).

Les photographies de Z. Carrière montrent qu'un jet d'air issu de la bouche d'un tuyau d'orgue génère de part et d'autre de son axe des tourbillons, avec une certaine période. Le phénomène d'auto oscillation du jet est assez analogue à la formation des méandres d'une rivière, bien que dans ce dernier cas, le terme d'inertie responsable de l'élargissement du méandre doit être remplacé par un terme d'érosion jouant le même rôle : la formation d'un méandre de courbure positive entraîne (avec un certain retard) la formation de méandres de courbure négative sur ses flancs. En un sens, il y a propagation de la perturbation du jet.

La périodicité du phénomène de génération des tourbillons est gouvernée par le nombre de Strouhal $Str \equiv V / (l_A \omega)$, un nombre sans dimensions qui caractérise les oscillations d'un écoulement fluide limité par un obstacle. Le jet génère des tourbillons de toutes tailles, la taille du tourbillon étant proportionnelle à la distance aux lèvres. Pour un jet libre illimité, les tourbillons sont générés à toutes les fréquences, ce qui explique pourquoi le son produit par le jet est un bruit à peu près blanc. En revanche, dans une embouchure de flûte, il y a une coupure introduite par le biseau dans la distribution de taille des tourbillons générés par le jet : les plus gros tourbillons sont générés sur une distance égale à la distance lèvres-biseau, et V / l_A est la fréquence angulaire du plus grand tourbillon qu'on puisse former avec un jet de vitesse V sur une distance l_A .

C'est la même relation (à α près) que celle du modèle décrivant l'anche comme une lame souple (eq. (2)).

Par ailleurs, on retrouve une relation analogue entre pulsation du jet et V / l_A quand on interprète les fréquences propres du jet comme des ondes stationnaires de déplacement, de pression ou de vitesse, voyageant à la vitesse du jet, et limitées à l'espace lumière-biseau.

Plusieurs approches conduisent donc à la même expression pour la pulsation caractéristique du jet :

$$\omega_A = V / l_A.$$

En présence d'un résonateur, il y a rétroaction du résonateur sur le jet, et c'est la raison pour laquelle nous cherchons maintenant une formalisation du couplage entre le jet et le résonateur. Nous revenons maintenant à la description du jet comme une lame souple encastrée, car celle-ci permet naturellement l'écriture d'une équation de couplage.

Le couplage jet-résonateur : formalisme général

La représentation du jet d'air comme un oscillateur à un degré de liberté permet de formaliser très facilement le couplage entre le jet et le résonateur constitué par le tuyau de la flûte. Dans le modèle présenté ici, le jet d'air est couplé au résonateur par une prescription de proportionnalité entre l'amplitude du mouvement transverse du jet d'air et l'amplitude du mouvement acoustique de l'air dans le tuyau. On peut même envisager de prescrire la conservation du débit transversal au niveau de l'embouchure, ce qui revient à supposer non seulement la proportionnalité mais l'égalité entre les deux amplitudes. Il y a quelques années, j'avais déjà utilisé cette expression avec succès pour modéliser les ocarinas [4], sans pousser très loin la validation du modèle. Pour ces derniers, le résonateur est simple car il possède un seul degré de liberté. Pour les flûtes, le résonateur a une infinité de degrés de liberté, mais le modèle de couplage reste le même.

L'expression du couplage

Le couplage entre le tube et l'oscillateur de l'embouchure (ici, l'anche aérienne, mais le formalisme pourrait être le même pour une anche solide) est décrit par l'équation suivante, qui suppose la proportionnalité entre les amplitudes du mouvement de l'anche a_A et de l'air dans le tube au voisinage de l'anche a_T :

$$a_A = f_c \cdot a_T \quad (4).$$

La constante de couplage f_c (supposée réelle) est un paramètre ajustable. Si on admet la conservation du débit transversal au niveau de l'embouchure, on a $f_c=1$.

L'expression de l'impédance du système couplé.

Pour évaluer l'impédance Z du système "jet couplé au tube", on écrit l'équation du mouvement du système couplé, sous l'effet d'oscillations forcées induites par une hypothétique force extérieure F_{ext} exercée sur le jet.

L'équation du mouvement de l'anche est

$$F_{ext} - K_A \cdot a_A - p(0) \cdot S_A = M_A \cdot \ddot{a}_A,$$

où S_A est la section de l'embouchure, considérée comme un prolongement du tube de la flûte, et $p(0)$ la pression acoustique au bout du tube, c'est à dire sur la face interne de l'anche aérienne.

L'impédance (complexe) du système couplé est définie comme étant le rapport entre la pression exercée sur la face extérieure du jet $p_A = F_{ext} / S_A$ et le débit transversal w_A au niveau de cette dernière : $w_A = \dot{a}_A \cdot S_A$:

$$Z \equiv \frac{p_A}{w_A}.$$

Avec la prescription de couplage (4), cette impédance vue du jet vaut :

$$Z = Z_A + Z_T / f_c,$$

où Z_A est l'impédance de l'anche seule :

$$Z_A = i \cdot \frac{(M_A \cdot \omega - K_A / \omega)}{S_A^2}, \text{ et où } Z_T \text{ est l'impédance du tube seul vu du bout supérieur, qui dépend des}$$

champs de pression et de débit à l'extrémité haute du tube :

$$Z_T \equiv \frac{p(0)}{w(0)} = \frac{p(0)}{\dot{a}_T \cdot S_T}.$$

La forme très simple de l'impédance $Z(\omega)$ du système couplé va permettre de raisonner sur les modes et les fréquences propres du système couplé jet-tube.

Pour la plupart des formes de la force d'auto entretien et pour des amplitudes de vibration faibles justifiant le cadre de l'acoustique linéaire, les fréquences en jeu sont données par les zéros de la partie imaginaire de l'impédance $Im(Z(\omega))$ (j'ai un article en préparation pour la justification de cette affirmation).

$$Im(Z(\omega)) = Im(Z_A + Z_T / f_c) = 0.$$

L'effet du couplage jet-résonateur sur les fréquences en jeu

Les pulsations ω_T et ω_A étant proches, on peut linéariser les fonctions impédance du jet et du résonateur au voisinage de la résonance :

$$Z_A \approx i \cdot \frac{2M_A}{S_A^2} (\omega - \omega_A) ; Z_T \approx Z'_T (\omega - \omega_T),$$

où Z'_T est la dérivée de l'impédance du résonateur par rapport à la pulsation au voisinage de la

$$\text{résonance : } Z'_T \equiv \left(\frac{\partial Z_T}{\partial \omega} \right)_{\omega_T}.$$

Cette linéarisation donne une expression analytique pour le zéro de la fonction impédance totale, c'est-à-dire pour la pulsation du système couplé :

$$\omega \approx \frac{2M_A \cdot \omega_A \cdot f_c + S_A^2 Z'_T \cdot \omega_T}{2M_A \cdot f_c + S_A^2 \cdot Z'_T} \quad (5).$$

Cette pulsation « en jeu » ω est une sorte de moyenne entre la pulsation ω_A du jet seul et celle ω_T du résonateur seul. Si la pulsation du jet et celle du résonateur coïncident, la pulsation en jeu est exactement égale à cette pulsation commune ; Si la pulsation du jet est supérieure à celle du résonateur, la pulsation en jeu est tirée vers le haut par le couplage jet-résonateur.

L'équation (5) ci-dessus peut être mise sous la forme d'une expression commode pour le décalage en fréquence dû au couplage au jet :

$$\omega - \omega_T = \frac{\omega_A - \omega_T}{1 + \frac{S_A^2 Z'_T}{2M_A \cdot f_c}} \quad (6).$$

Dans les cas pratiques intéressant les ocarinas et les flûtes, le dénominateur de l'eq.(6) est beaucoup plus grand que 1, et on a :

$$\omega - \omega_T = (\omega_A - \omega_T) \cdot \frac{2.M_A.f_c}{S_A^2.Z_T'} = (\omega_A - \omega_T) \cdot \frac{2.\rho.e.f_c}{S_A.Z_T'}$$

La susceptibilité de la fréquence en jeu à une variation de la vitesse du jet, définie comme

$$\chi \equiv \frac{V}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial V} \text{ peut alors être obtenue :}$$

$$\chi \approx \frac{2.\rho.e.f_c.\omega_A}{S_A.Z_T'.\omega_T}$$

Comme on a constaté que ω_A et ω_T étaient proches, on aboutit à une expression simplifiée de la susceptibilité :

$$\chi \approx \frac{2.\rho.e.f_c}{S_A.Z_T'} \quad (7).$$

On se propose maintenant d'appliquer ce formalisme successivement aux ocarinas, puis aux flûtes.

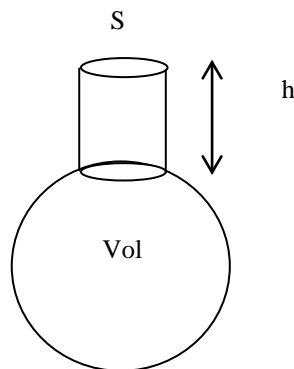
Le couplage jet-résonateur sur les ocarinas

Les ocarinas représentent un système particulièrement propice à l'étude du couplage jet-résonateur, en raison de la simplicité dudit résonateur qui n'a qu'un seul mode excitable en pratique : le mode Helmholtz [4]. On a donc affaire à deux systèmes couplés, le jet et le résonateur, avec chacun un seul degré de liberté et des paramètres d'oscillateur M_A et K_A pour le jet et M_T et K_T pour le résonateur :

$$M_A = \rho.e.g.l_A, \quad K_A = \alpha^2.V^2.\rho.e.g.l_A^{-1}, \quad Z_A = i.\frac{(M_A.\omega - K_A/\omega)}{S^2}$$

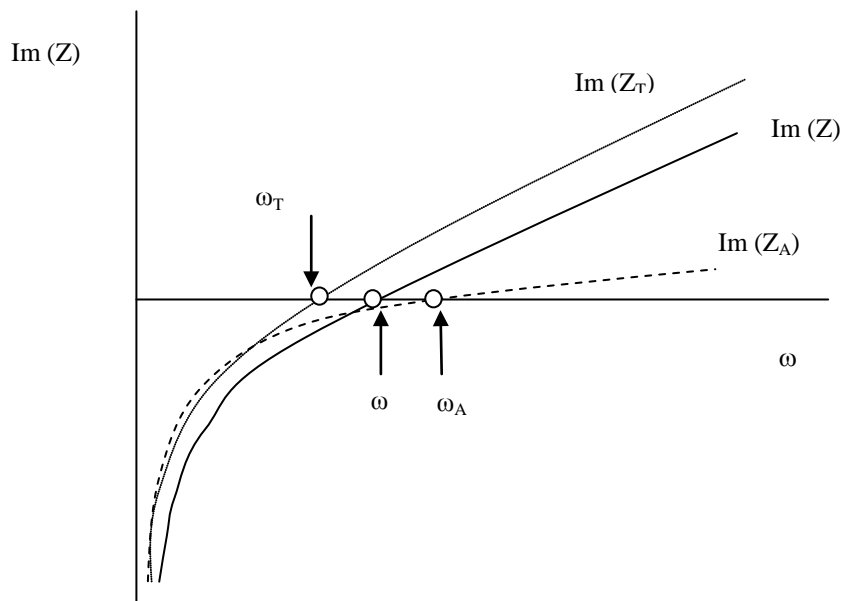
$$M_T = \rho.S.h, \quad K_T = \rho.S^2.c^2.vol^{-1}, \quad Z_T = i.\frac{(M_T.\omega - K_T/\omega)}{S^2}$$

où vol est le volume du résonateur, h et S la hauteur et la section de son goulot, et c la vitesse du son.



Les paramètres géométriques d'un ocarina, considéré comme un résonateur de Helmholtz.

La partie imaginaire de l'impédance du système couplé $Z = Z_A + Z_T / f_c$ a l'allure ci-dessous :



L'impédance d'un ocarina, vue du jet d'air. Z_T est l'impédance du résonateur, Z_A est l'impédance du jet d'air seul, Z est l'impédance du système couplé. La pulsation propre du système est le zéro de la fonction impédance. Dans l'exemple montré ici, la pulsation propre du jet est supérieure à celle du résonateur, et la pulsation du système couplé est située entre ces deux pulsations propres. Toute augmentation de la vitesse du jet a pour conséquence une augmentation de la pulsation propre du jet, et donc de la pulsation du système couplé : le son monte.

La pulsation « en jeu » de l'ocarina est celle du système couplé, qui vaut :

$$\omega = \left(\frac{f_c \cdot K_A + K_T}{f_c \cdot M_A + M_T} \right)^{1/2} .$$

On peut en général considérer que le couplage au jet n'apporte qu'une petite perturbation à la pulsation propre du résonateur, parce que les paramètres M_A , K_A sont petits devant M_T , K_T . Dans ces conditions, la pulsation en jeu vaut :

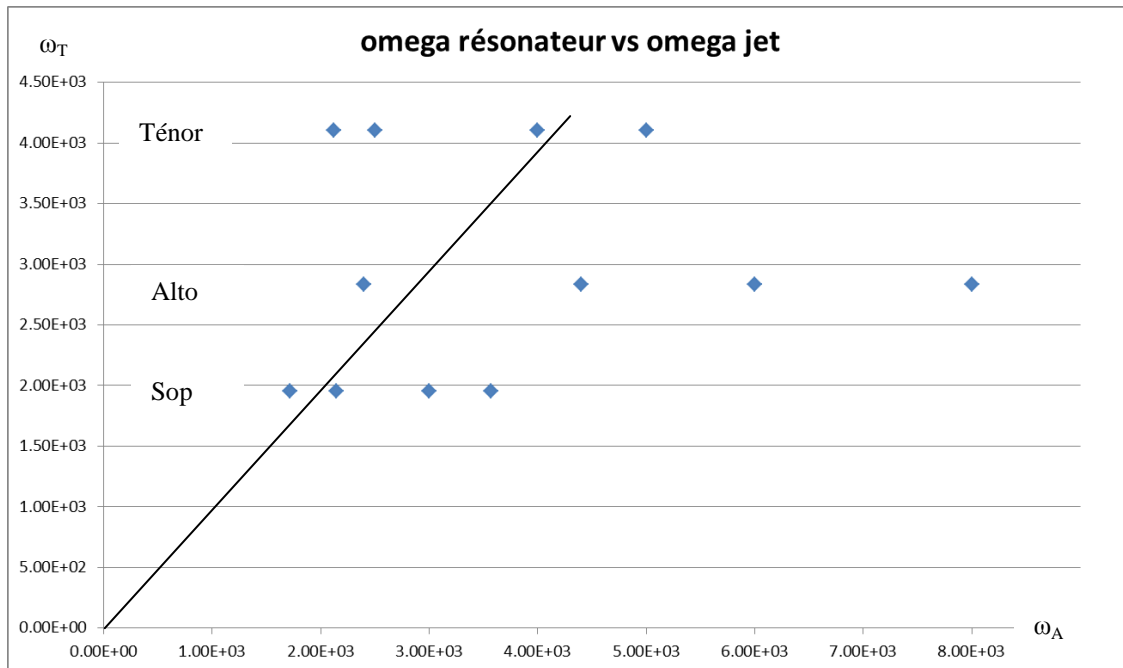
$$\omega = \omega_T \cdot (1 + 1/2 f_c \cdot (K_A / K_T - M_A / M_T)) .$$

En adaptant l'éq.(7) au cas des ocarinas, il vient pour la susceptibilité :

$$\chi = f_c \cdot \frac{e}{h} \quad (8).$$

Toutes choses égales par ailleurs, l'ocarina sera donc "raide", (c'est à dire qu'il changera difficilement de fréquence sous l'action d'un changement des paramètres du jet) si la hauteur de son goulot h est grande.

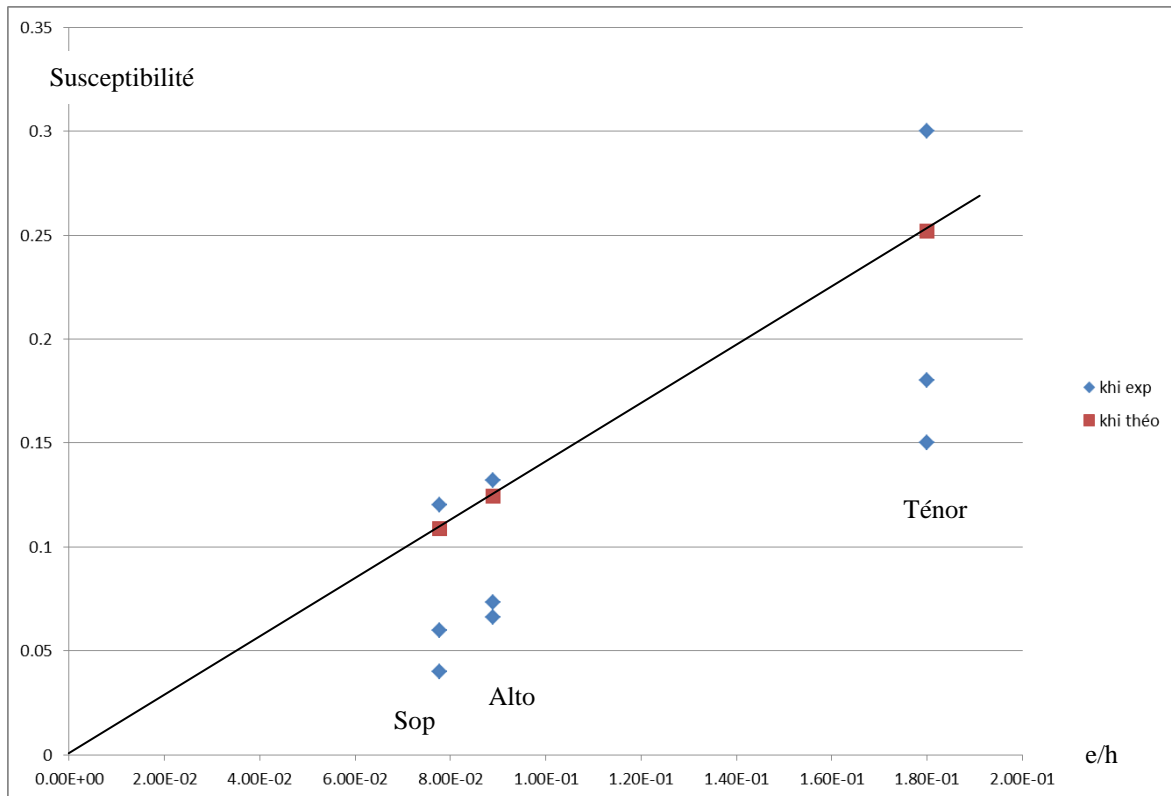
Cette expression a été confrontée à l'expérience avec le protocole expérimental suivant : on souffle dans des ocarinas de géométrie connue, en mesurant simultanément la pression de bouche (avec un manomètre à eau), le temps d'expiration et la fréquence du son (avec un accordeur électronique). La pression de bouche permet d'évaluer la vitesse du jet V , via la relation de Bernoulli. Le temps d'expiration donne également la vitesse du jet, connaissant la capacité des poumons de l'instrumentiste et la géométrie du porte-vent. Ces deux évaluations indépendantes concordent à 20% près (désaccord dû probablement aux pertes de charges dans le canal, qui, comme on le voit, restent faibles), ce qui donne confiance dans l'évaluation de V . Le résultat expérimental est donné ci-dessous :



La pulsation du jet $\omega_A = \alpha.V / l_A$ tracée en fonction de la pulsation du résonateur pour trois ocarinas de géométrie et de tessiture différente (un soprano, un alto et un ténor, tous fabriqués par moi), joués avec des pressions de bouche et donc des vitesses de jet différentes. La droite du diagramme correspond à la relation $\omega_A = \omega_T$ ($\alpha=1$)

Sur les ocarinas, l'utilisateur a une latitude considérable sur la pression de bouche et donc, sur la vitesse du jet. Cependant, au milieu de ce champ de liberté, et pour $\alpha = 1$, on constate ici un quasi-accord $\omega_A \approx \omega_T$ entre la fréquence propre du jet et celle du résonateur. Comme on le verra plus loin, cette constatation semble très générale et vaut également pour les flûtes.

Lors de cette expérience sur les ocarinas, on a aussi mesuré à l'accordeur électronique la hauteur du son produit pour chaque valeur de la vitesse du jet. L'expérience a été répétée sur les trois ocarinas sus mentionnés. On en a tiré la susceptibilité expérimentale, qu'on a pu comparer avec la susceptibilité théorique donnée par l'éq. (8).



Le diagramme de la susceptibilité mesurée sur trois ocarinas de géométrie différente, en fonction du rapport e/h de leur embouchure. On obtient un accord théorie-expérience convenable sur l'éq. (8), avec une constante de couplage $f_c=1.4$. L'incertitude sur la susceptibilité expérimentale a été estimée à 40%.

On obtient un bon accord théorie expérience avec des paramètres $\alpha = 1$ et $f_c = 1.4$, proches des valeurs canoniques $\alpha = \sqrt{2}$ et $f_c = 1$, ce qui donne du crédit au modèle. Comme on le verra ci-dessous, ces paramètres conviennent également pour décrire la susceptibilité des flûtes.

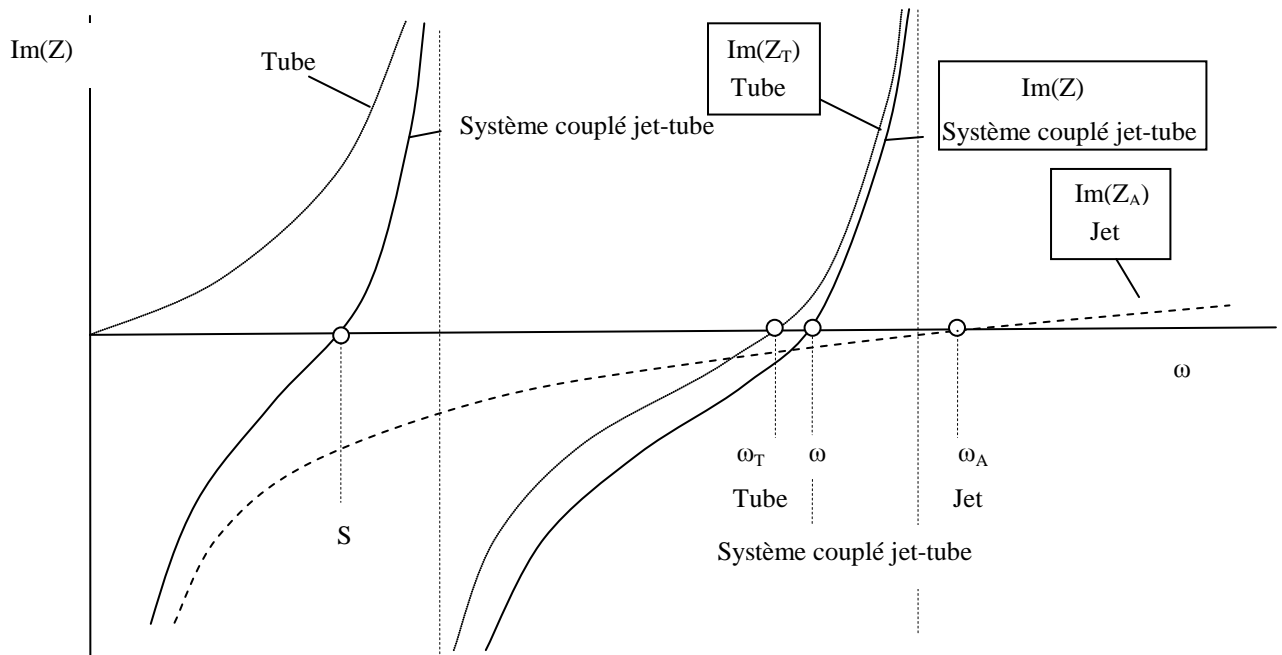
Le couplage jet-résonateur sur les flûtes

L'impédance du système couplé jet-tube pour les flûtes

Dans le cas des flûtes, le résonateur n'est plus un résonateur de Helmholtz à un seul degré de liberté comme sur les ocarinas, mais un tube excitable sur plusieurs modes. L'application du formalisme de couplage est à peine plus compliquée. L'impédance globale du système couplé est toujours donnée par

$$Z \equiv \frac{P_A}{w_A} = Z_A + Z_T / f_c, \text{ mais la partie imaginaire de l'impédance du tube } Z_T \text{ a cette fois une allure}$$

« tangentoïde » qui admet plusieurs zéros aux fréquences propres des différents modes du résonateur. La représentation graphique des impédances Z_A et Z_T permet de visualiser l'allure de l'impédance globale du système pour un tube ouvert à l'extrémité inférieure (cf figure ci-dessous).



Les impédances du tube, du jet et du système couplé jet-tube.

Mode spurieux et son de biseau

Comme on peut le voir sur le schéma de l'impédance ci-dessus, le modèle prédit un mode spurieux à basse fréquence (étiqueté « S » dans le schéma), au-dessous de l'octave inférieure du fondamental, qui pourrait correspondre à ce qu'on appelle un « mode de biseau » [1, 2]. Selon le modèle présenté ici, ce mode a une pulsation

$$\omega_s \approx \omega_A \cdot \left(f_c \cdot \frac{e}{L_T} \cdot \frac{S_T}{S_A} \right)^{1/2} \quad (\text{relation obtenue en faisant un développement limité de l'impédance du tube à basse fréquence}).$$

Cette pulsation est proportionnelle à la vitesse du jet, ce qui est effectivement une des caractéristiques des sons de biseau, et dépend peu de la longueur du tube, puisqu'elle est proportionnelle à $L_T^{-1/2}$. J'ai cherché à produire expérimentalement ce mode S prédit par la théorie. En soufflant très doucement dans des têtes de flûtes à bec, on entend effectivement un son de basse fréquence et de faible intensité qui pourrait correspondre au signalment de ce mode spurieux : comme pour les modes de biseau, sa hauteur varie beaucoup en fonction de la vitesse de l'air, sans que j'aie pu vérifier s'il y a bien proportionnalité entre fréquence et vitesse du jet. Son émission est assez fugace et se prête mal à une étude quantitative. D'ailleurs, ce mode S est tellement loin de la fréquence du jet qu'il n'est pas facile de l'exciter sans accrocher le mode suivant, communément appelé « fondamental ». Réservant une étude plus approfondie du mode S à plus tard, je me suis donc concentré sur les modes classiques d'excitation des flûtes.

Comme pour les ocarinas, le modèle prédit un effet d'attraction en fréquence induit par le couplage jet-tube : la pulsation en jeu ω est comprise entre celle du tube ω_T et celle du jet ω_A . Si la fréquence du jet est inférieure à celle du tube, la fréquence en jeu sera inférieure à cette dernière, donc tirée vers le bas par le couplage au jet ; si la fréquence du jet est supérieure à celle du tube, la fréquence en jeu sera supérieure à cette dernière, donc tirée vers le haut. Comme ω_A dépend de la vitesse du jet, le modèle rend compte du fait que la fréquence du son produit par une flûte monte quand on souffle plus fort.

Les paramètres d'embouchure des flûtes

Afin de calculer l'attraction en fréquence induite par le couplage jet-tube sur les flûtes, j'ai commencé par évaluer la vitesse du jet d'air pour une grande variété de flûtes par la mesure de la pression de bouche au manomètre à eau et application de la loi de Bernoulli. Comme pour les ocarinas, l'évaluation de la vitesse du jet par la méthode de l'expiration donne des résultats concordants à 20% près. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

tessiture	omega flute (rd/s)	Pb (cm H2O)	Pb (Pa)	V jet Bernoulli (m/s)	L jet (m)	G jet (m)	e jet (m)	M(kg)	K(N/m)	omega jet (rd/s)	
fl à bec sop	grave (C5)	3288	1.7	170	16.83	3.50E-03	9.00E-03	8.00E-04	3.02E-08	6.99E-01	4809
	médium (C6)	6574	4	400	25.82	3.50E-03	9.00E-03	8.00E-04	3.02E-08	1.65E+00	7377
	aigu (C7)	13150	10	1000	40.82	3.50E-03	9.00E-03	8.00E-04	3.02E-08	4.11E+00	11664
fl à bec alto	grave (F4)	2194	1.5	150	15.81	6.00E-03	1.10E-02	8.00E-04	6.34E-08	4.40E-01	2635
	C5	3287	3.5	350	24.15	6.00E-03	1.10E-02	8.00E-04	6.34E-08	1.03E+00	4025
	médium (F5)	4388	3.5	350	24.15	6.00E-03	1.10E-02	8.00E-04	6.34E-08	1.03E+00	4025
	aigu (F6)	8776	10	1000	40.82	6.00E-03	1.10E-02	8.00E-04	6.34E-08	2.93E+00	6804
fl à bec tenor	grave (C4)	1644	1.2	120	14.14	8.00E-03	1.50E-02	8.00E-04	1.15E-07	3.60E-01	1768
	médium (C5)	3288	3.2	320	23.09	8.00E-03	1.50E-02	8.00E-04	1.15E-07	9.60E-01	2887
	aigu (C6)	6576	8	800	36.51	8.00E-03	1.50E-02	8.00E-04	1.15E-07	2.40E+00	4564
fl à bec basse	grave (F3)	1097	0.9	90	12.25	1.00E-02	2.00E-02	8.00E-04	1.92E-07	2.88E-01	1225
	médium (F4)	2194	3	300	22.36	1.00E-02	2.00E-02	8.00E-04	1.92E-07	9.60E-01	2236
	aigu (F5)	4388	8	800	36.51	1.00E-02	2.00E-02	8.00E-04	1.92E-07	2.56E+00	3651
fl traversière en ut	grave (C4)	1644	1.5	150	15.81	9.00E-03	1.30E-02	1.00E-03	1.40E-07	4.33E-01	1757
	médium (G5)	4926	7	700	34.16	7.00E-03	1.20E-02	8.00E-04	8.06E-08	1.92E+00	4880
	aigu (C7)	13150	18	1800	54.77	5.00E-03	1.10E-02	7.00E-04	4.62E-08	5.54E+00	10954
piccolo	grave (C5)	3288	3	300	22.36	6.00E-03	1.10E-02	9.00E-04	7.13E-08	9.90E-01	3727
	médium (G6)	9852	12	1200	44.72	5.00E-03	1.00E-02	8.00E-04	4.80E-08	3.84E+00	8944
	aigu (A7)	22120	25	2500	64.55	4.00E-03	9.00E-03	6.00E-04	2.59E-08	6.75E+00	16137

Pression de bouche, vitesse d'air et paramètres d'oscillateur de jet typiques pour divers types de flûtes (avec la valeur «ajustée» alpha = 1.0 et non avec la valeur canonique 1.414).

On constate que, pour une valeur du paramètre α de 1.0, proche de la valeur canonique $\sqrt{2}$, les fréquences du jet (colonne omega jet dans le tableau) sont proches des fréquences en jeu (colonne omega flute), pour tous les types de flûtes, du piccolo jusqu'aux flûtes basses. Ceci ne peut pas être une coïncidence. Dans les instruments réels, il semble donc que le flûtiste ajuste à peu près la fréquence propre du jet à celle du tube pour le partiel qu'il souhaite exciter. Cette situation rappelle celle des cuivres, où le musicien ajuste la tension de ses lèvres de telle sorte que leur fréquence de vibration propre coïncide avec celle de la note à produire.

L'influence du jet sur les fréquences en jeu des flûtes

Ces données sur le jet permettent de faire une évaluation quantitative de l'effet du couplage jet-tube sur les fréquences en jeu des flûtes, et de comparer les prédictions du modèle à l'expérience.

Dans le cas particulier d'un tube cylindrique ouvert en bas, l'impédance Z_T a une expression simple :

$$Z_T = i \frac{\rho \cdot c}{S_T} \cdot \tan(k \cdot L),$$

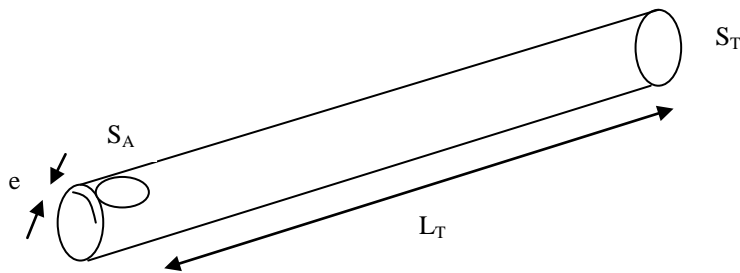
où c est la vitesse du son, k la constante de propagation, ρ la densité de l'air, L_T la longueur et S_T la section du tube. On peut noter au passage qu'un resserrement du tube principal au voisinage de

l'embouchure, considérée comme le prolongement de la perce, n'a pas d'incidence sur l'expression de l'impédance du tube vue de son extrémité. Au voisinage de la résonance,

$$Z'_T = i \frac{\rho \cdot L_T}{S_T} \quad (9).$$

Dans le cas d'un tube cylindrique ouvert en bas, la susceptibilité donnée par l'eq. (7) devient alors :

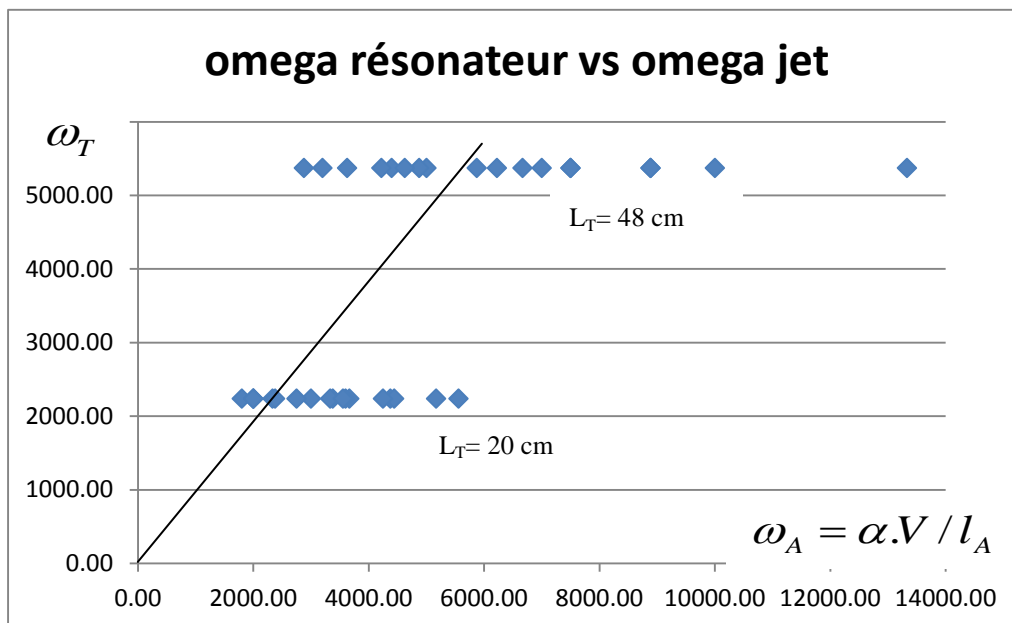
$$\chi \approx 2 \cdot f_c \cdot \frac{e}{L_T} \cdot \frac{S_T}{S_A} \quad (10).$$



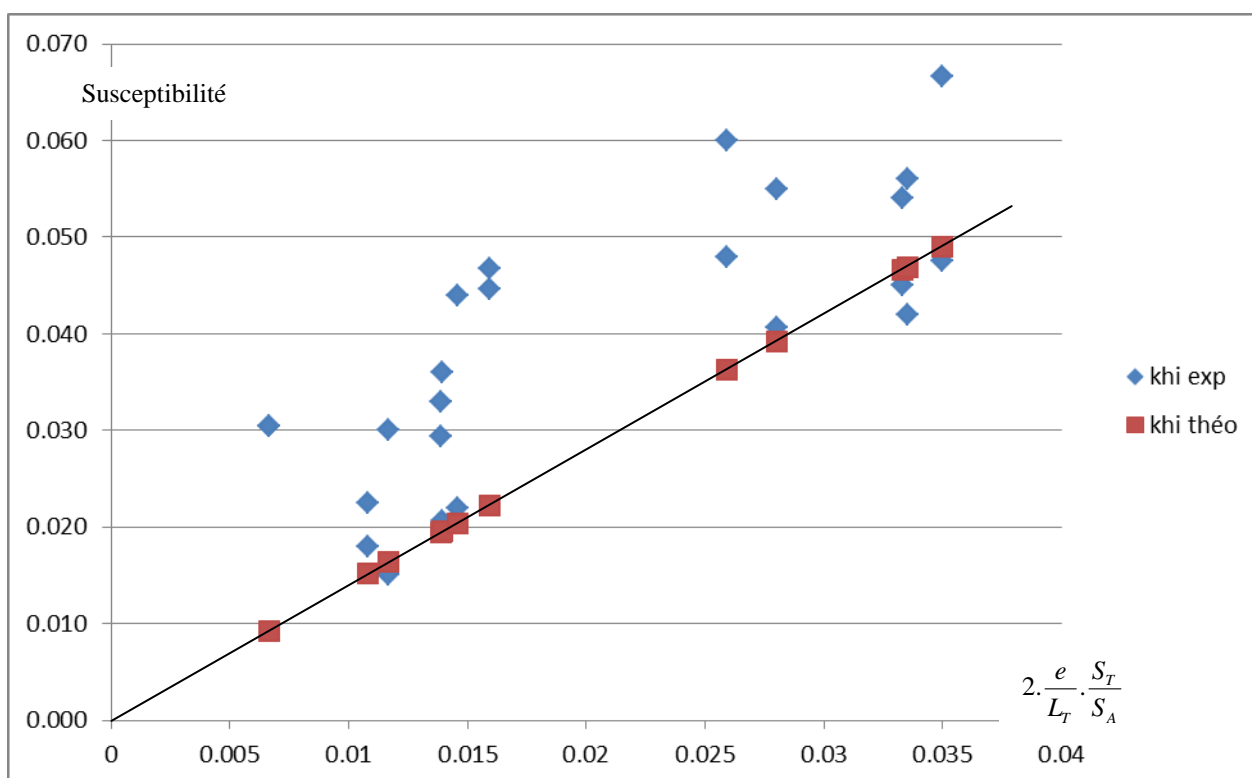
Les paramètres géométriques de la flûte influençant sa susceptibilité

Pour la plupart des flûtes, la susceptibilité est de l'ordre de quelques 10^{-2} , ce qui signifie qu'une variation de vitesse de jet d'un facteur 2 (donc une variation de pression de bouche d'un facteur 4), qui correspond à peu près à la largeur du champ de liberté disponible sur une flûte pour une note donnée, causera une variation de fréquence de quelques 10^{-2} soit d'environ un demi-ton. C'est bien l'ordre de grandeur observé expérimentalement, comme peut le constater tout bon flûtiste qui a un peu exploré les limites de son instrument. Des comparaisons théorie-expérience plus détaillées sont présentées ci-dessous.

Comme le montre l'eq. (10), l'effet d'attraction en fréquence dû au couplage au jet est d'autant plus fort que le tube est court (L_T petit) et gros (S_T grand). La géométrie de l'embouchure (hauteur de la lumière e , surface de la fenêtre S_A) joue également sur la susceptibilité. J'ai pu le vérifier expérimentalement sur des tubes cylindriques de différentes longueurs, excités par des embouchures de flûte à bec fabriquées « maison » avec des paramètres géométriques différents. La susceptibilité de ces « instruments » a été mesurée par mesure simultanée de la vitesse du jet et de l'écart de justesse à l'accordeur électronique, comme pour les ocarinas. Les résultats expérimentaux sont résumés dans les figures ci-dessous.



La pulsation du jet $\omega_A = \alpha \cdot V / l_A$ tracée en fonction de la pulsation du résonateur pour deux tubes de longueur différente (20 cm et 48 cm) excités successivement par six embouchures de flûte à bec de géométries (l_A, e, g) différentes, joués avec des pressions de bouche différentes. La droite du diagramme correspond à la relation $\omega_A = \omega_T$ ($\alpha=1$).



Le diagramme de la susceptibilité mesurée sur deux tubes de longueur différente (20 cm et 48 cm) excités par successivement par six embouchures de flûte à bec de géométrie différente, tracé en

fonction de la quantité $2 \cdot \frac{e}{L_T} \cdot \frac{S_T}{S_A}$. Comme pour les ocarinas, on obtient un accord théorie-expérience sur l'eq. (10) convenable avec $f_c=1.4$.

Comparaison des effets du couplage jet-résonateur entre ocarinas et flûtes

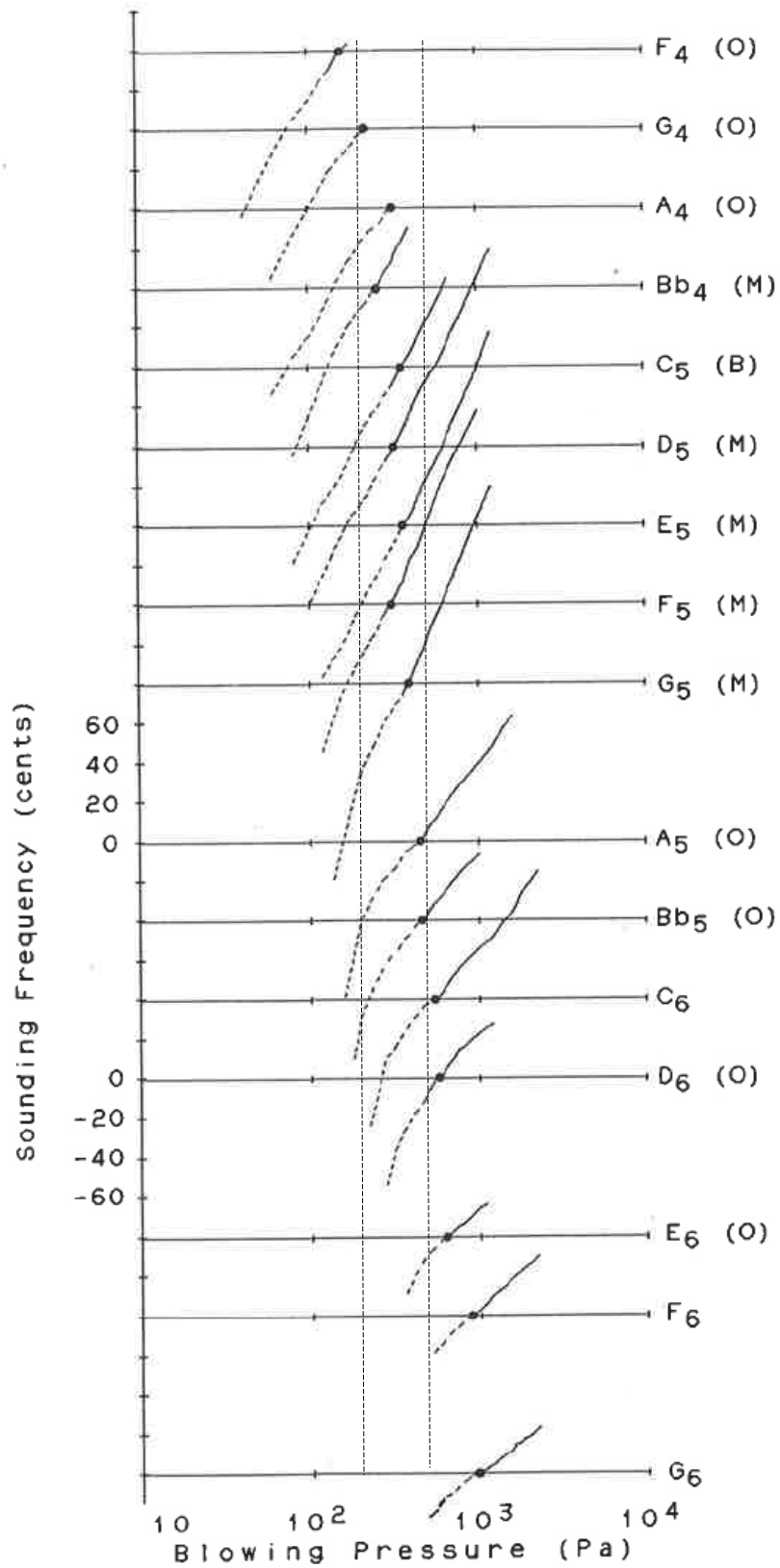
On peut comparer les eqs (8) et (10) donnant la susceptibilité de la fréquence en jeu vis-à-vis d'un changement de la vitesse du jet pour un ocarina et pour une flûte :

$$\text{Ocarina : } \chi = f_c \cdot \frac{e}{h} \quad (8)$$

$$\text{Flûte : } \chi = 2 \cdot f_c \cdot \frac{e}{L_T} \cdot \frac{S_T}{S_A} \quad (10)$$

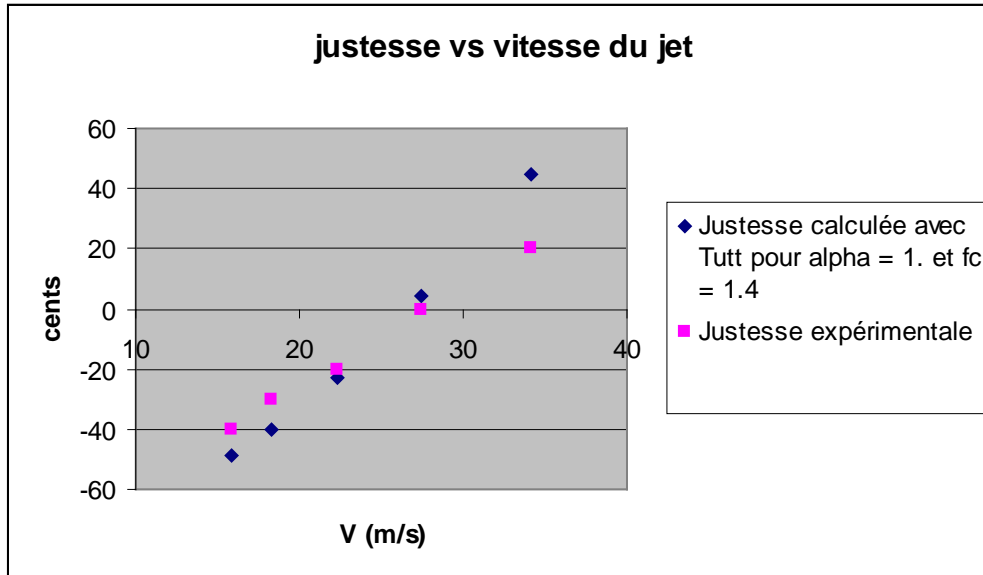
La longueur L_T d'une flûte est en général considérablement plus grande que la hauteur h du goulot d'un ocarina de même fréquence : sur la base de cette seule considération, on prédirait donc que la susceptibilité en fréquence d'une flûte est nettement plus faible que celle d'un ocarina, mais ce facteur est en partie contrebalancé par le rapport S_T/S_A , qui peut être grand sur certaines flûtes, avec pour résultat que la susceptibilité des ocarinas est dans le domaine $\{0.1-0.3\}$ alors que celle des flûtes est plutôt dans $\{0.01-0.06\}$. Ce n'est pas le moindre succès du présent modèle de jet et de couplage que de reproduire correctement la susceptibilité de ces deux types d'instruments assez différents.

Le modèle de jet et de couplage jet-résonateur présenté ici semble donc reproduire l'expérience de façon satisfaisante. Il est temps maintenant de passer à l'application aux instruments réels. La relation entre la justesse en jeu et la pression de bouche a été mesurée pour les différentes notes de la tessiture d'une flûte à bec alto « Bressan » par John Martin [5] (cf figure ci-dessous) : Ces mesures contiennent des informations sur la susceptibilité des diverses notes de la tessiture de cette flûte. Je les ai complétées par mes propres mesures sur une flûte à bec alto similaire.



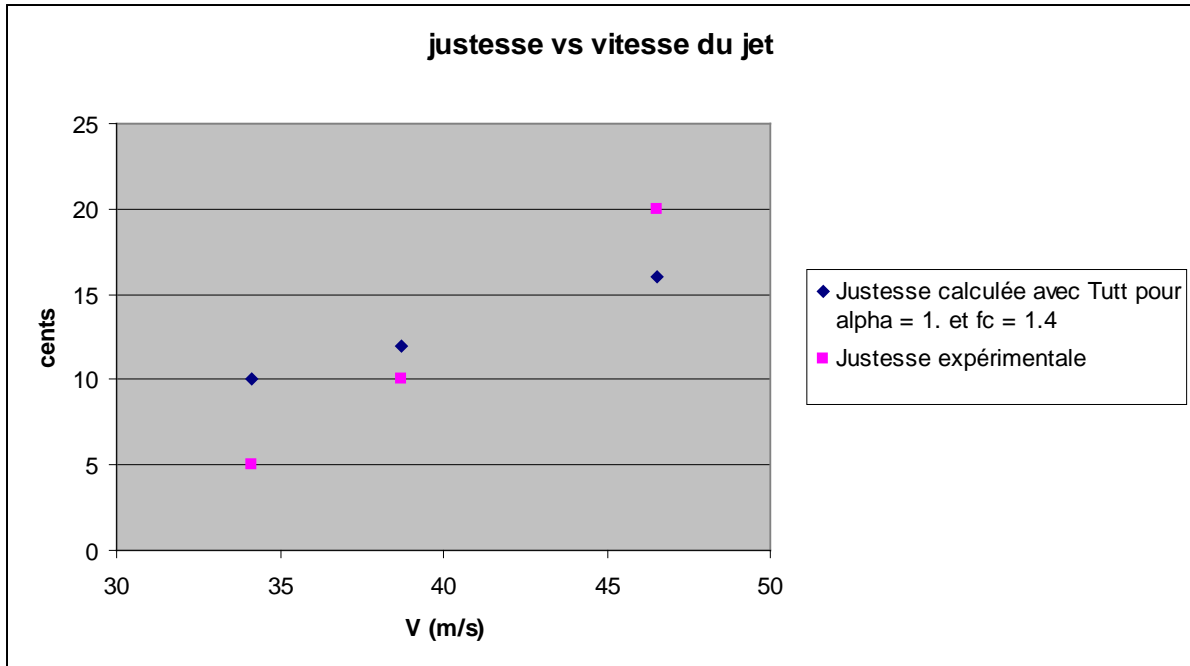
Relation fréquence en jeu-pression de bouche mesurée pour les différentes notes de la tessiture d'une flûte à bec alto « Bressan » [5]

Le formalisme ci-dessus est inclus dans le logiciel Tutt [6], qui calcule directement l'impédance du système couplé jet-tube, ce qui permet de faire une comparaison théorie-expérience quantitative sans faire l'hypothèse simplificatrice d'un tube cylindrique : la figure ci-dessous présente le résultat d'un calcul fait avec Tutt sur un do5 de flûte à bec alto pour différentes valeurs de vitesse du jet, et le compare à l'expérience.



Sensibilité de la hauteur d'un do5 de flûte à bec alto en fonction de vitesse du jet. Le calcul théorique a été fait avec le logiciel Tutt [6], qui contient le formalisme exposé ici ; les valeurs expérimentales ont été mesurées par la méthode de la pression de bouche citée plus haut. L'incertitude expérimentale sur la justesse mesurée est estimée à 15 cents.

Dans le cas d'une flûte, Z'_T n'a pas obligatoirement la valeur indiquée pour un tube cylindrique simple (eq. (9)), ceci pour plusieurs raisons : d'une part, la perce d'une flûte n'est généralement pas parfaitement cylindrique, d'autre part, le tube est percé de trous latéraux bouchés ou non selon le doigté considéré, ce qui affecte beaucoup la forme de la courbe d'impédance, surtout sur les doigtés de fourche. Il faut alors introduire la notion de note « raide » et de note « molle » : l'influence du couplage jet-tube sur les fréquences en jeu, qui dépend de Z'_T , dépend de la forme de la courbe d'impédance. Une note raide, qui possède un zéro d'impédance très marqué avec un Z'_T très grand, sera peu influencée par le couplage au jet. L'équation (10) suggère que la raideur d'une note doit être d'autant plus grande que la longueur acoustique de la colonne d'air en jeu est plus grande. C'est effectivement ce que l'on constate expérimentalement sur les flûtes réelles : il est beaucoup plus facile de faire varier « au souffle » la justesse de notes du haut de la gamme (la, si, do sur une flûte en ut ou ré, mi fa sur une flûte en fa, c'est-à-dire celles qui ont beaucoup de trous débouchés et qui correspondent à une longueur de tuyau réduite) que celles du bas de la gamme (ré mi fa sur une flûte en ut, ou sol, la, si sur une flûte en fa), qui correspondent à un tube de longueur acoustique bien supérieure. Cet effet apparaît tout à fait clairement sous forme d'une différence de pente au changement de registre entre les notes sol5 et la5 sur la figure tirée du travail de John Martin. Voici à titre d'exemple la comparaison théorie-expérience pour une note particulièrement raide : le mi aigu de la flûte à bec alto. Le calcul avec le logiciel Tutt prédit qu'il doit être difficile de faire varier au souffle la hauteur de cette note de plus d'une quinzaine de cents, et c'est bien ce que l'expérience confirme.

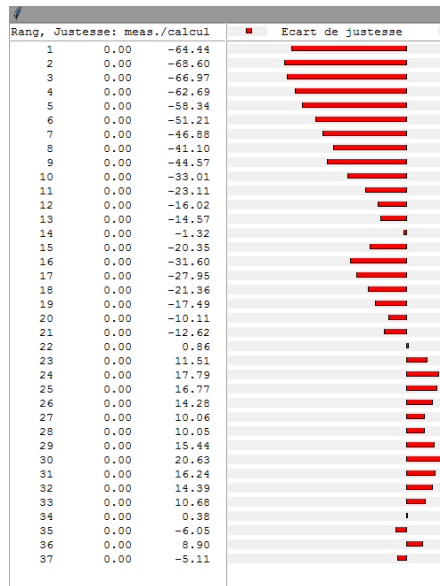


Sensibilité de la hauteur d'un mi7 de flûte à bec alto en fonction de la vitesse du jet d'air.

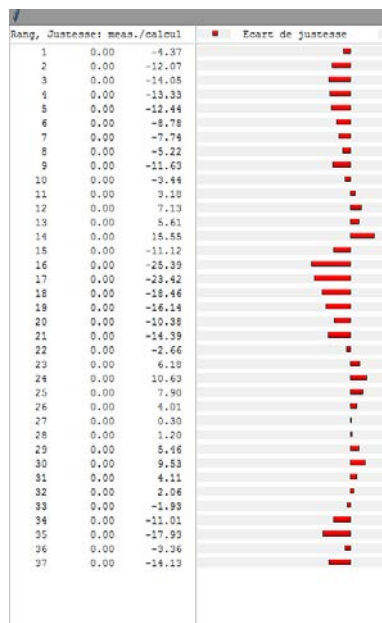
Calcul de la justesse des flûtes. L'influence du flûtiste.

On voit que le couplage jet-tube est donc utile, sinon essentiel à la description de la justesse des flûtes. A titre d'exemple, on montre ci-dessous deux calculs faits avec le logiciel Tutt d'une même flûte Boehm avec et sans couplage au jet. On constate que la justesse d'une flûte Boehm (réputée juste et jouable par le flûtiste qui lui appartient¹) est médiocrement reproduite par le calcul des fréquences passives, qui apparaissent comme trop basses dans le grave et trop hautes dans l'aigu. Ce cas est général : on trouve la même chose en analysant la plupart des bons instruments, qu'il s'agisse de flûtes à bec ou de flûtes traversières. Or, en regardant de plus près la table 1 donnant les paramètres du jet sur des flûtes réelles, même si $\omega_A \cong \omega_T$ dans le milieu de la tessiture, on constate que $\omega_A \geq \omega_T$ dans le bas de la tessiture et $\omega_A \leq \omega_T$ dans le haut de la tessiture de toutes les flûtes examinées. Pour reproduire correctement la justesse des bonnes flûtes, on ne peut négliger cet effet : la loi de vitesse du jet en fonction du degré de la note est une donnée importante qui doit être prise en compte sur les instruments réels.

¹ Non non, ce n'est pas un lapsus



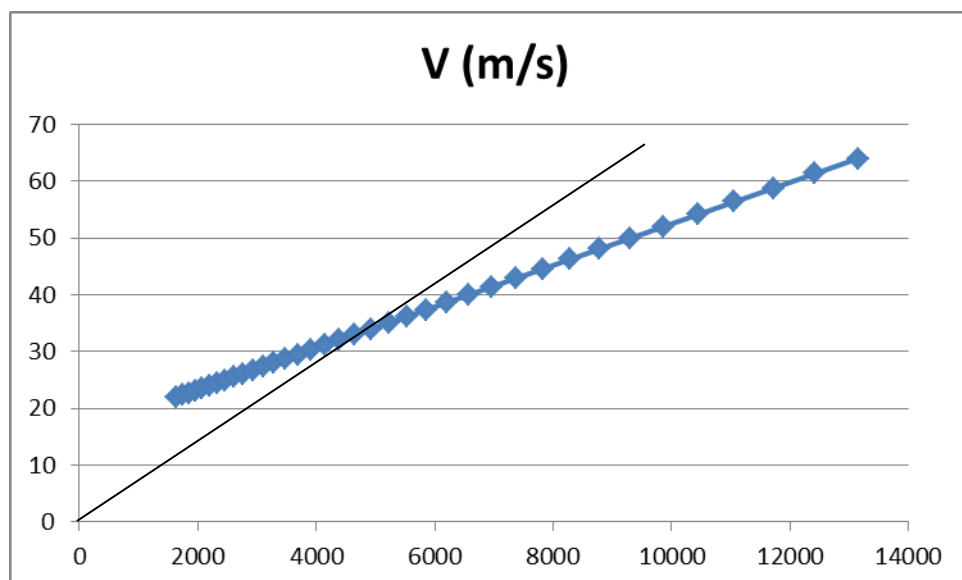
Calcul de la justesse d'une flûte Boehm sans couplage au jet ($f_c=0$)



Calcul avec le logiciel Tutt de la justesse d'une flûte Boehm avec couplage au jet ($\alpha = 1, f_c = 1.4$) sur les 37 degrés de la tessiture du grave (1) à l'aigu (37). Avec couplage au jet, la justesse prédite est bonne et régulière, conformément à l'avis du propriétaire de cette flûte de bonne facture.

On a constaté qu'il y avait quasi accord entre la fréquence propre du jet et celle du résonateur, mais si cet accord était exactement respecté, la fréquence en jeu serait exactement celle du résonateur sans couplage. Le travail du concepteur de flûte pourrait alors se limiter à faire en sorte que les fréquences passives du résonateur soient aussi justes que possible. Cependant, une flûte conçue ainsi serait inconfortable en jeu, car elle demanderait un large éventail de pression de bouche : très faible dans le grave, très forte dans l'aigu. Elle aurait aussi un son très inhomogène, très faible dans le grave et très puissant dans l'aigu. C'est peut-être pourquoi il semble que les flûtes réelles soient conçues pour être jouées avec une vitesse de jet un peu plus grande que la prescription ci-dessus dans le grave de la

tessiture, et un peu plus petite que la prescription dans l'aigu. Une vitesse d'air un peu forte dans le grave aura pour avantage un son plus puissant dans le domaine le moins sonore de la tessiture ; une vitesse d'air un peu faible dans l'aigu aura pour avantage un son moins perçant dans le domaine le plus sonore de la tessiture. Tout ceci indique la nécessité de prendre en compte le couplage jet-tube dans les calculs de conception. Avant de calculer, il faudra au préalable avoir spécifié la loi de gradation de la vitesse de jet de bas en haut de la tessiture de l'instrument, ce qui est un choix de conception qui relève d'un compromis entre l'ergonomie de l'instrument (qui dicte une loi de vitesse aussi plate que possible), l'homogénéité de son volume (qui dicte elle aussi une loi de vitesse assez plate) et ses qualités d'émission et d'intonation (qui dicte une loi de vitesse proportionnelle à la fréquence à produire). Ce compromis, qui se traduit par le choix d'une loi de vitesse du jet en fonction du degré de la note, n'a rien d'universel et dépend sans doute du flûtiste et de ses habitudes de jeu. La recherche sans fin de certains flûtistes professionnels en quête de la tête de flûte idéale trouve peut-être ses origines ici : sur les flûtes Boehm, ce sont principalement la conicité de la tête et la géométrie du trou d'embouchure qui influent sur la pente de la courbe de justesse. La combinatoire de ces éléments est à peu près infinie, on peut facilement laisser sa jeunesse à la recherche de la tête de flûte idéale !



Un exemple de loi de vitesse du jet d'air sur une flûte réelle : relation entre vitesse du jet et pulsation de la note, typique d'un flûtiste moyen, pour une flûte Boehm en ut. Chaque point représente un degré de la tessiture de la flûte. La vitesse est plus forte dans le grave et plus faible dans l'aigu que ne le laisserait attendre une stricte relation de proportionnalité entre vitesse et pulsation.

Les paramètres du modèle de couplage jet-résonateur

Le modèle ci-dessus a deux paramètres qu'on peut considérer comme ajustables : la constante de couplage f_c et le coefficient de raideur α . La constante de couplage f_c gouverne la susceptibilité de la justesse en fonction de la vitesse du jet, alors que le coefficient alpha influe sur la fréquence propre du jet. Ces deux paramètres ont des valeurs canoniques : $f_c=1$ et $\alpha = \sqrt{2}$. L'accord sur la sensibilité de la justesse à la pression de bouche a été obtenu avec des valeurs peu différentes : $f_c=1.4$ et $\alpha=1$ sur diverses flûtes et ocarinas, ce qui donne plutôt confiance dans les fondements du modèle.

Le logiciel Tutt, dans lequel le présent formalisme a été inclus, a deux autres paramètres pour spécifier la loi de vitesse du jet : V_0 et V_1 qui représentent respectivement la vitesse du jet au milieu

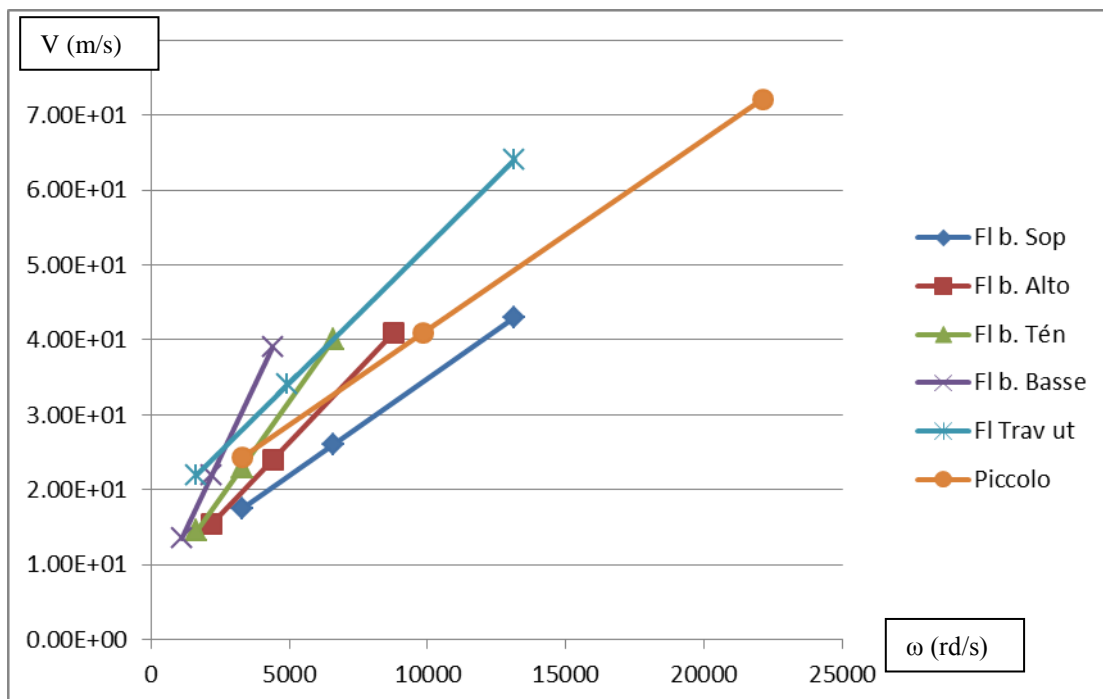
de la tessiture et l'amplitude de la variation de vitesse du jet entre les extrêmes de la tessiture. La loi de vitesse de jet peut être paramétrisée de la façon suivante :

$$V = V_0 + V_1 \cdot \frac{\omega_{ref} - \omega_c}{\omega_c},$$

où ω_{ref} est la pulsation attendue pour la note considérée et ω_c la pulsation centrale de la tessiture de l'instrument. V_0 et V_1 ne sont pas des paramètres ajustables, mais sont des grandeurs physiques directement mesurables qui caractérisent la façon de souffler du flûtiste. On trouvera dans le tableau ci-dessous des valeurs de V_0 et V_1 typiques, telles que j'ai pu les mesurer sur diverses sortes de flûtes (le flûtiste moyen, c'était moi !).

	V_0 (m/s)	V_1 (m/s)
fl à bec sop	2,60E+01	1,70E+01
fl à bec alto	2,40E+01	1,70E+01
fl à bec tenor	2,30E+01	1,70E+01
fl à bec basse	2,20E+01	1,70E+01
fl traversière en ut	3,40E+01	1,80E+01
piccolo	4,10E+01	2,50E+01

Les paramètres de la loi de vitesse de jet pour diverses sortes de flûtes.

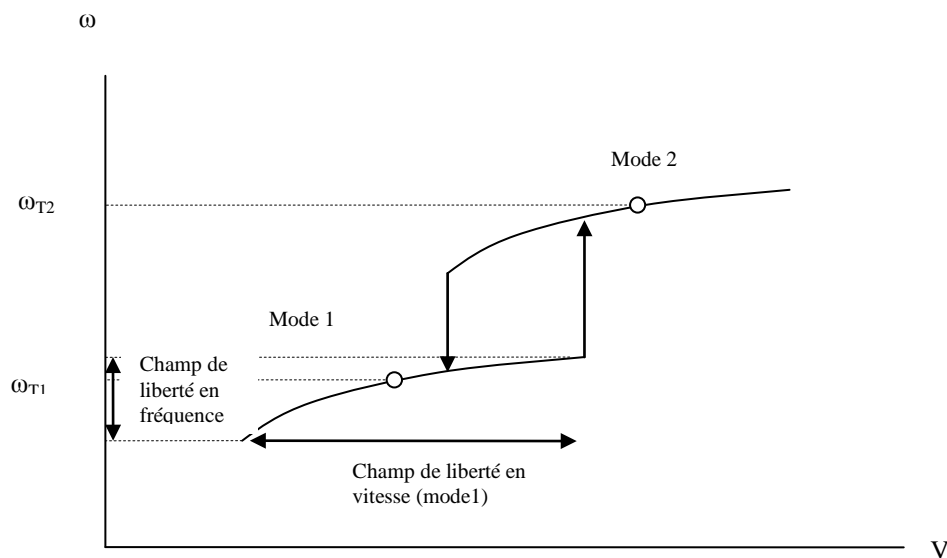


Lois de vitesses de jet d'air typiques pour diverses sortes de flûtes, en fonction de la pulsation de la note à produire

Champs de liberté : les domaines de pression de bouche, de vitesse de jet et de fréquence accessibles en jeu

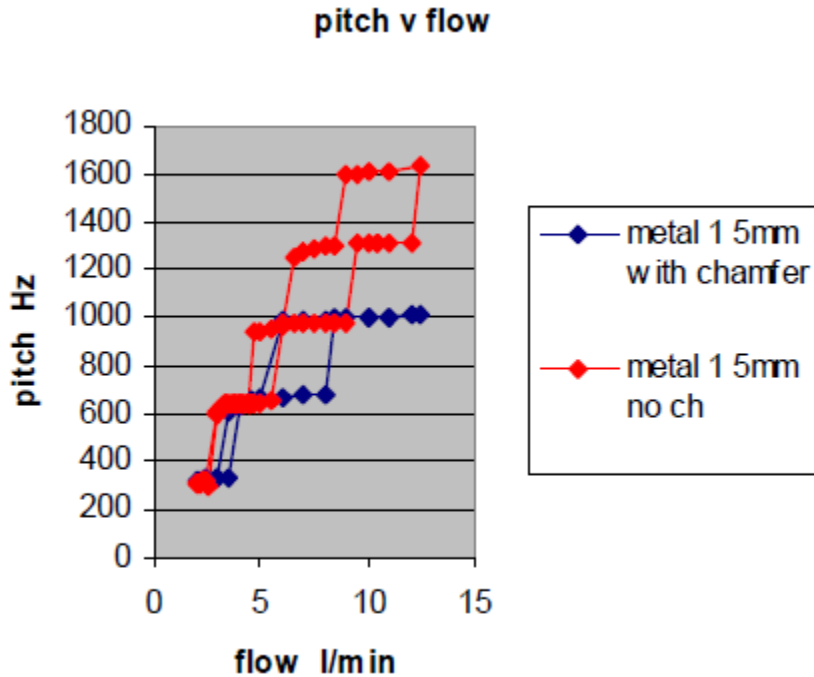
Après avoir discuté la susceptibilité de la fréquence en jeu, il reste à discuter la largeur du domaine de pression de bouche et le champ de liberté en fréquence accessibles sur chaque note. On se place ici dans le cas d'une flûte à bec, où les paramètres géométriques de l'embouchure sont fixes, et où seule la vitesse du jet peut être choisie par le flûtiste (les joueurs de flûte traversière ont d'autres moyens d'influer sur la justesse, par exemple en couvrant plus ou moins le trou d'embouchure).

Le domaine de vitesse de jet utilisable sur une note de la flûte est limité vers le bas par le seuil d'auto-entretien (si on souffle trop doucement, la note ne sort plus) dans le cas du mode fondamental, ou par la transition vers le partiel inférieur si on a affaire à un mode d'ordre supérieur (si on souffle trop doucement, la note craque) ; le domaine est limité vers le haut par la transition vers le partiel supérieur (si on souffle trop fort, la note canarde). La largeur du champ de liberté en fréquence peut se lire dans une certaine mesure sur la courbe d'impédance de la note considérée. Une courbe d'impédance régulière avec des zéros bien marqués correspondra à une émission stable et à un champ de liberté large. Il est connu que les transitions entre modes ont un caractère hystérétique : elles ne se font pas à la même vitesse de jet à la montée et à la descente.



Les champs de liberté en fréquence et en vitesse de jet. On observe un phénomène d'hystérésis pour la transition entre modes.

En fait, la stabilité des modes et les seuils de transition dépendent non seulement de la forme de la courbe d'impédance, mais aussi de la géométrie de l'embouchure. En particulier, la forme des chanfreins à la sortie du canal joue un rôle très important sur la stabilité de l'émission. Des chanfreins arrondis rendent le jet bistable par effet Coanda : le champ de liberté en vitesse de jet devient alors grand et l'émission très hystérétique. Inutile donc de chercher trop loin le critère de stabilité ou de transition entre modes car le diable est dans les détails de la géométrie de l'embouchure !



Les champs de liberté pour une flûte à bec dépendent des détails de l'embouchure, en l'occurrence ici, des chanfreins à la sortie du canal. Réf [7], communication personnelle de Mike Hutley.

Conclusion

La description du jet d'air d'une flûte comme une anche aérienne analogue à un ressort capable d'oscillations transverses a le mérite de la simplicité. Les paramètres de cet oscillateur à un degré de liberté peuvent être facilement évalués, pour en déduire la « fréquence caractéristique » du jet, qu'on trouve être proportionnelle au rapport V/l_A , où V est la vitesse du jet. Cette description du jet comme un oscillateur linéaire à un seul degré de liberté est évidemment incapable de rendre compte de l'auto-entretien du son : il faudrait pour cela introduire des non-linéarités quelque part dans le système ! En revanche, on peut l'espérer suffisante pour décrire l'influence du jet sur les fréquences en jeu.

Il est frappant que la relation $\omega = \alpha V/l_A$ (où ω est ici une fréquence en jeu) soit respectée approximativement avec $\alpha = 1$ pour *toutes* les flûtes, depuis la soprano jusqu'à la basse. Cet accord est trop universel pour être une simple coïncidence. Il semble que le flûtiste ajuste les paramètres de son jet d'air pour amener le rapport $\alpha V/l_A$ (interprété comme étant une fréquence caractéristique du jet) à peu près en accord avec la note qu'il veut produire. Cette idée n'est pas si étrange : après tout, un joueur de cuivres fait de même : il ajuste la fréquence de ses lèvres à une des résonances de son instrument (tuyau + cavité buccale) et, si on lui enlève son tuba ou sa trompette (en lui laissant l'embouchure), les lèvres sur l'embouchure seule « buzzent » encore à la même fréquence ! Je me suis borné à transposer cette idée aux flûtes, et à montrer qu'elle possédait un certain pouvoir descriptif.

La description du jet d'air utilisée ici a le grand mérite de permettre une modélisation mathématique très simple et naturelle du couplage entre le jet et le résonateur, produisant une expression analytique du décalage en fréquence induit par le couplage, expression en accord quantitatif avec l'expérience, aussi bien pour les ocarinas que pour les flûtes.

Le jet d'air des flûtes a un couplage au tube très différent de celui des anches roseau : sur les anches roseau, la fréquence propre de l'anche est généralement très supérieure à celle du tube : cela explique

pourquoi on se trompe complètement sur la justesse des hautbois si on ne modélise pas le couplage à l'anche solide, (cf la section sur le couplage aux anches roseau dans mon petit article sur l'acoustique des troncs de cône, dans lequel on représente l'anche comme un volume effectif [8]). Par contraste, sur les flûtes, il y a quasi accord entre la fréquence propre du jet et celle du résonateur et si cet accord est exactement respecté, la fréquence en jeu est celle du résonateur sans couplage. En pratique, cet accord n'est pas exactement respecté, en particulier dans les extrêmes de la tessiture, et, même si l'effet n'est pas grand, la prise en compte du couplage jet-tube reste un enjeu pour la conception des instruments, ainsi qu'un des moyens importants dont dispose le flûtiste sur le contrôle de sa justesse.

Merci à Mike Hutley pour avoir stimulé cette réflexion par des discussions et des expériences, et à Barry Lloyd pour ses critiques constructives.

Références

- 1 Henri Bouasse *Instruments à vent*.
- 2 M. Castellengo, bulletin du GAM (27 Juin 1969), <http://organ-au-logis.pagesperso-orange.fr/Pages/ParametresTuyau.htm>
- 3 V. Strouhal (1878) "*Ueber eine besondere Art der Tonerregung*" *Annalen der Physik und Chemie*, 3rd series, **5** (10) : 216–251.
- 4 BB Ninob *Les ocarinas* <http://la.trompette.free.fr/Ninob/Ninob.php>
- 5 John Martin, « *The acoustics of the recorder* », *Moeck editions*, 1994.
- 6 BB Ninob *Le logiciel Tutt* <http://la.trompette.free.fr/Ninob/Ninob.php>
7. Mike Hutley, *communication personnelle*
- 8 BB Ninob, *Acoustique des troncs de cône excités par des anches solides*. <http://la.trompette.free.fr/Ninob/Ninob.php>