Propagation du son dans les tuyaux coudés

Introduction

Beaucoup d'instruments à vent ont un tuyau comportant une partie courbe. Il est généralement admis que le comportement acoustique de ces instruments est identique en première approximation à celui du même tuyau, déroulé. Pourtant, quelques interrogations subsistent à propos du basson, dont le tube est replié de façon radicale. Certains trompettistes prétendent également que le comportement de leur instrument est différent selon la courbure de la coulisse qu'ils emploient. Plus généralement, le calcul précis des modes propres de la colonne d'air d'un instrument à vent doté d'un tube replié demande la réponse à la question : « Comment se propage le son dans un tuyau coudé ? ».

Développement mathématique

On considère un tube de section rectangulaire, de rayons de courbure R1 et R2, et d'angle au sommet Θ (Figure 1).

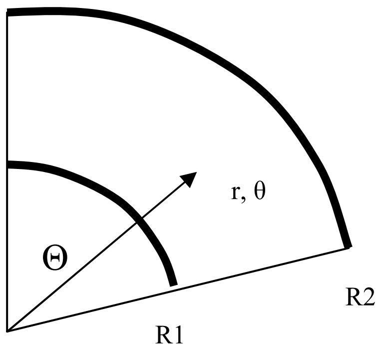

Figure 1.

L'équation de propagation de la pression acoustique p

$\Delta p = -k^2.p$ (1)

s'écrit dans ce cas particulier (coordonnées cylindriques, pas de dépendance en z pour le champ de pression) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = -k^2 p \qquad (2).$$

On cherche une solution factorisée sous la forme

$p(\rho,\theta) = (p_u e^{ikR\theta} + p_d e^{-ikR\theta}).a(\rho)$ (3), avec $\rho = k.r$,

où toute la dépendance angulaire est contenue dans le premier facteur et toute la dépendance radiale dans le second. Dans le premier, la quantité R est une constante, pour l'instant inconnue. Par analogie avec un tuyau droit, la fonction a(ρ) se rapproche d'une constante si les rayons de courbure R1 et R2 du tube sont grands devant R2-R1.

L'équation de propagation (2) impose à la fonction a(ρ) de vérifier

$$a'' + (1 - \frac{k^2 R^2}{\rho^2})a + \frac{a'}{\rho} = 0 \qquad (4).$$

On a affaire à une équation de Bessel dont la solution générale est

$a(\rho) = a_0.J_{kR}(\rho) + a_1.Y_{kR}(\rho)$ (5), où J et Y sont les fonctions de Bessel de paramètre kR. .

Les conditions aux limites imposent que la dérivée radiale de la pression à la paroi soit nulle, soit ici

$a'(\rho_1) = a'(\rho_2) = 0$.

On pourrait chercher un développement limité de la fonction a(ρ), sachant que pour un coude serré et une onde de basse fréquence, kR<<1. Le champ de pression ainsi déterminé dans le coude ne se raccorde pas avec les ondes planes dans les sections droites de part et d'autre du coude, ce qui suggère que l'expression (5) n'est pas tout à fait la bonne. Faute de mieux, on se concentrera ici sur des choses plus simples : on sait que la dépendance radiale du champ de pression est faible, au moins pour les coudes peu serrés. Une solution du type a(ρ) = constante approximera au mieux l'équation (4) si on choisit R de telle sorte que la quantité $1-\frac{k^2R^2}{\rho^2}\equiv 1-\frac{R^2}{r^2}$ soit nulle en moyenne sur la section du tube. Ceci peut aussi s'écrire

$$R=\sqrt{\langle r^2\rangle} \qquad (6).$$

Ainsi donc, la meilleure approximation en ondes quasi-planes (a(ρ) = cste) du champ de pression est obtenue en prenant pour R l'expression (6).

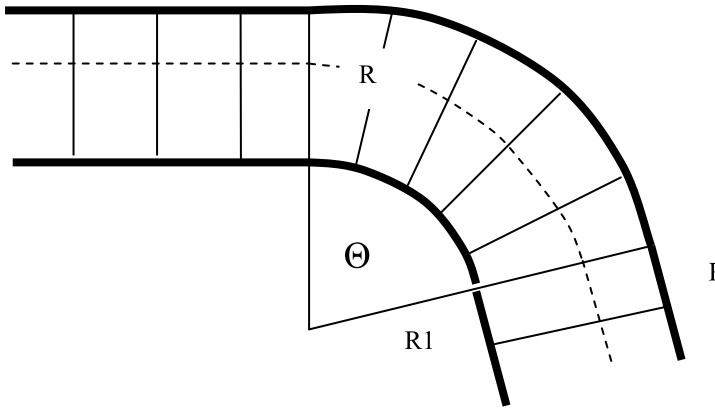

Figure 2. Propagation de l'onde de pression acoustique dans le coude. Les lignes d'égale pression sont approximées par des rayons. La pression se propage dans le tube courbe à peu près comme dans un tube droit de même section, et de longueur R. Θ, où R n'est pas le rayon de courbure moyen du tube, mais la moyenne ***quadratique*** *dudit rayon de courbure.*

La longueur effective du coude est donc R. Θ. C'est cette longueur de tube qu'il faudra introduire en lieu et place du coude pour décrire le système comme un tube déplié de même section dans lequel se propagent des ondes planes longitudinales.
Pour un tube de section rectangulaire (seul cas pour lequel nous établissons ce résultat), le rayon effectif du coude vaut :

$$R=\left(\frac{\int_{R1}^{R2} r^2dr}{\int_{R1}^{R2} dr}\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{3}.\frac{R_2^{\ 3}-R_1^{\ 3}}{R_2-R_1}\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{3}.(R_1^{\ 2}+R_1.R_2+R_2^{\ 2})\right)^{1/2} \qquad (7).$$

A titre d'exemple, une culasse de basson constitue un raccord en « épingle à cheveux » entre deux tubes de diamètre 20 mm. Elle est assimilable à la géométrie de la figure 1 avec R1 = 10 mm, R2 = 30 mm, et Θ = π. Si nous appliquons l'équation (7) malgré le fait que le tube n'est pas de section rectangulaire, mais a une forme plus complexe, nous trouvons que la longueur développée équivalente de la culasse est d'environ 65.4 mm. On note au passage que cette longueur est légèrement supérieure (mais pas de beaucoup) à l'expression qu'on obtiendrait en prenant pour R la simple moyenne arithmétique (R1+R2)/2 des rayons de courbure extrêmes du coude, soit 62.8 mm. Il faut cependant reconnaître que la différence entre les deux expressions est minime : voisine de 3 mm dans le cas particulier de la culasse de basson, ce qui n'est déjà pas beaucoup, elle se réduit à 0.4 mm dans le cas d'une coulisse de trompette.

Comparaison théorie-expérience

Pour mettre expérimentalement en évidence la longueur équivalente associée au coude, nous avons construit un tube de 18 mm de diamètre intérieur replié à 90 °, puis raccordé une extrémité de ce tube à une embouchure de flûte à bec alto. Une embouchure de flûte a été choisie car elle produit des sons de hauteur plus stable qu'une embouchure à anche. La longueur des deux sections de tube prises le long de la génératrice interne au coude était de 98.5 + 56 mm. Le raccordement était à angle vif, avec R1 = 0, R2 = 18 mm, Θ = 90 °. Selon l'eq. (7), le coude a une longueur effective de 16.3 mm (contre 14.1 mm si on prend pour le rayon du coude le rayon moyen (R1+R2)/2). Cette flûte coudée a été comparée à une flûte droite « dépliée », de longueur 98.5 + 56 + 16.3 mm. On constate que non seulement la fréquence du fondamental, mais aussi le spectre du son produit sont identiques dans les deux cas. Le coude n'a donc introduit aucune différence dans le comportement acoustique de la colonne d'air.
La précision de la mesure de la fréquence était de l'ordre de 0.6% ou 10 cents, ce qui est à peine suffisant pour discriminer entre les deux expressions R= eq.(7) et R = (R1+R2)/2 pour le rayon acoustique du coude.

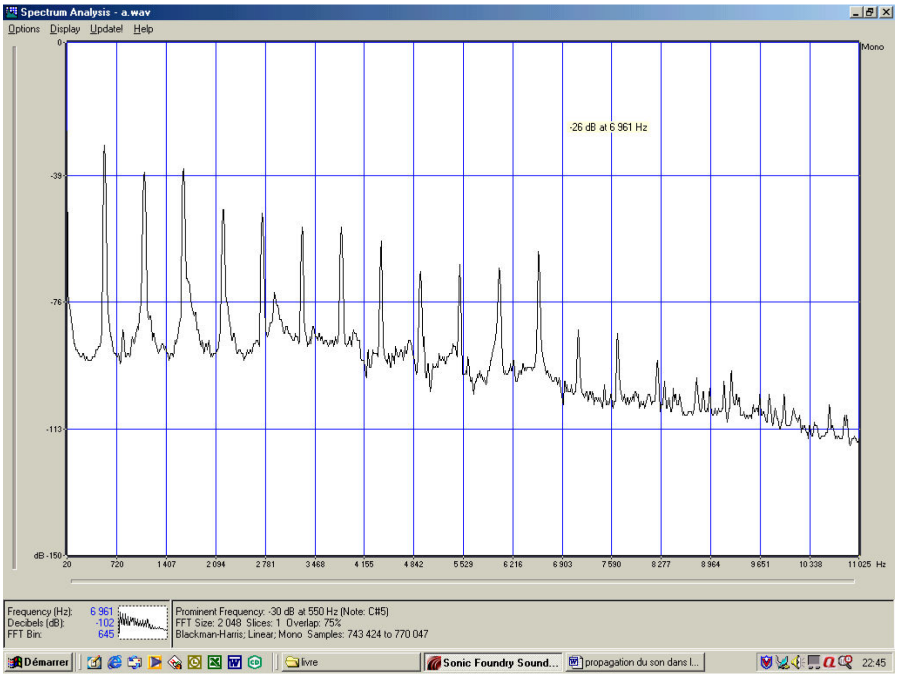

Figure 3 : Le spectre du fondamental de la flûte avec le tuyau coudé.

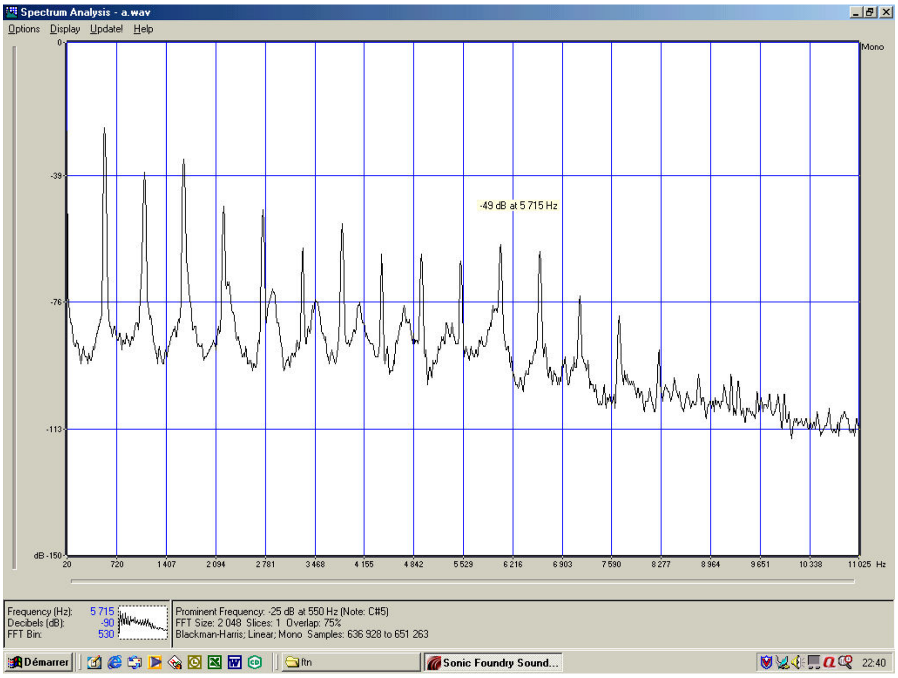

Figure 4 : Le spectre du fondamental de la flûte avec le tube doit de même longueur.

Conclusion

Nous avons trouvé une expression approchée du champ de pression acoustique pour décrire la propagation du son dans un coude, sous forme d'une onde quasi-plane. Tout se passe à peu près comme si l'onde acoustique se propageait dans un tuyau droit, la longueur de section rectiligne équivalant au coude étant R. Θ, où R est le rayon de courbure du tuyau moyenné quadratiquement (expression (7)). Il ne s'agit là que d'une expression approchée, l'approximation est d'autant meilleure que la courbure du coude est plus faible. Cependant, cette approximation s'avère en fait excellente même pour les coudes les plus serrés.

Cette étude ne rend pas compte des sensations différentes décrites par certains trompettistes comparant des instruments courbés différemment. Si l'on en croit cette étude sommaire, en acoustique, on peut déplier les coudes !