

## Modes propres d'un tronc de cône terminé ou non par une cavité, avec ou sans couplage à l'anche

BB. Ninob, Août 2013

**Résumé :** les colonnes d'air en forme de tronc de cône et fermées au petit bout ont des octaves trop larges. L'ajout d'une cavité au bout du tuyau permet de rétablir la justesse de ces octaves. Si les proportions du tronc de cône et le volume de la cavité sont bien choisis, cette justesse peut même être approximativement conservée sur tous les doigtés naturels d'un tronc de cône percé de trous latéraux. L'adjonction d'une anche solide au niveau du petit bout du tronc de cône abaisse les fréquences en jeu, comme si on avait rajouté au petit bout du cône une cavité dont le volume effectif dépend des caractéristiques de l'anche. Ceci permet de comprendre comment les saxophones, hautbois et bassons peuvent avoir des octaves justes, et comment leur justesse est affectée par des variations des caractéristiques (dimension, raideur) de leurs anches. L'article propose une estimation des volumes de cavité équivalents associés aux anches de divers types d'instruments, clarinettes, saxophones, hautbois, bassons. Une fois ces volumes équivalents pris en compte, on vérifie que tous les instruments classiques respectent les relations entre leurs principaux paramètres géométriques qui leur donnent des octaves justes. L'article propose des critères permettant de concevoir de nouveaux instruments à anche, en éclairant le choix de leurs éléments essentiels : type et volume de l'embouchure, conicité et longueur du tube.

La plupart des instruments à anche ont une perce soit cylindrique, soit conique. Dans ce dernier cas, le cône n'est jamais parfait : il est tronqué au petit bout. On se propose ici d'étudier les fréquences en jeu des instruments à anche, en commençant par le plus simple : le calcul des fréquences de résonance d'un tronc de cône fermé au petit bout. Dans un deuxième temps, on rajoutera une anche au bout du tuyau.

### Modes propres d'un tronc de cône simple

Pour une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , les champs sonores dans un tronc de cône peuvent s'exprimer sans aucune approximation en fonction de deux paramètres complexes A et B :

$$p(x,t) = \frac{1}{1 + \Delta x} \cdot (A.e^{ikx} + B.e^{-ikx}) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{eq. 1})$$

$$w(x,t) = \left(-\frac{S_0}{i\omega\rho_A}\right) \cdot [A.(ik + \Delta.(ikx - 1)) \cdot e^{ikx} - B.(ik + \Delta.(ikx + 1)) \cdot e^{-ikx}] \cdot e^{i\omega t}$$

pour le champ de pression et de débit respectivement.

Dans ces expressions,  $S_0$  est la section du tronçon à son origine, et  $\Delta$  est la conicité du tronçon (fig. 1) :

$$\Delta \equiv \frac{DL - D0}{D0.L} \equiv \frac{1}{R}.$$

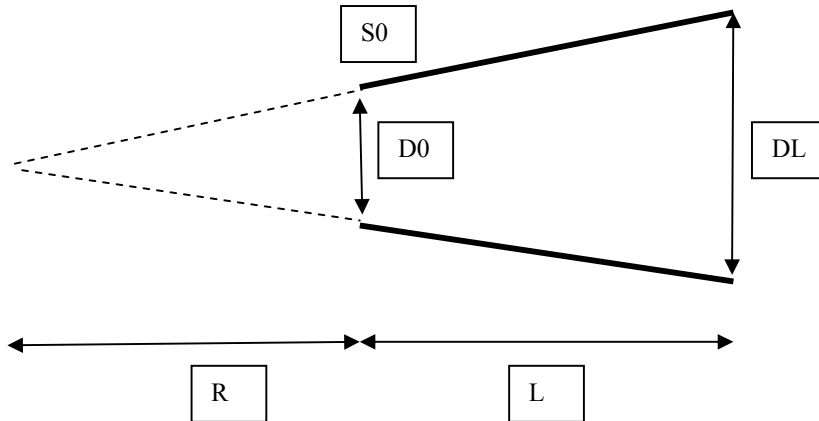


Figure 1 : le tronc de cône

Pour un tronc de cône ouvert aux deux bouts, les fréquences permises sont données par la relation  $k.L = n.\pi$ . Ce résultat est indépendant de la conicité du tuyau. Le spectre du tronc de cône ouvert aux deux bouts est donc harmonique, et identique à celui d'un tuyau cylindrique de même longueur.

Pour un tronc de cône ouvert au gros bout et fermé au petit bout, les fréquences permises sont données par la relation (fig.2) :

$$\tan(k.L) = -k / \Delta \quad (\text{eq. 2}).$$

Si  $L.\Delta$  est grand devant 1 (cas des hautbois et autres instruments « à bout pointu »), on peut faire un développement limité de l'eq. 2 pour trouver les constantes de propagation des premiers modes propres :

$$k_n \approx \frac{n.\pi}{L + \frac{1}{\Delta}} = \frac{n.\pi}{L_{\text{cône complet}}}. \text{ L'approximation est valable tant que } n \ll L.\Delta.$$

La pulsation du cône tronqué reste donc quasiment égale à celle du cône non tronqué. Curieusement, l'ablation de la pointe du cône ne change presque rien aux fréquences de vibration du tuyau restant fermé au petit bout, du moins tant que la longueur enlevée reste inférieure au tiers de la longueur totale du cône. L'harmonicité des partiels est à peu près préservée, jusqu'à un rang tel que  $n \ll L.\Delta$ .

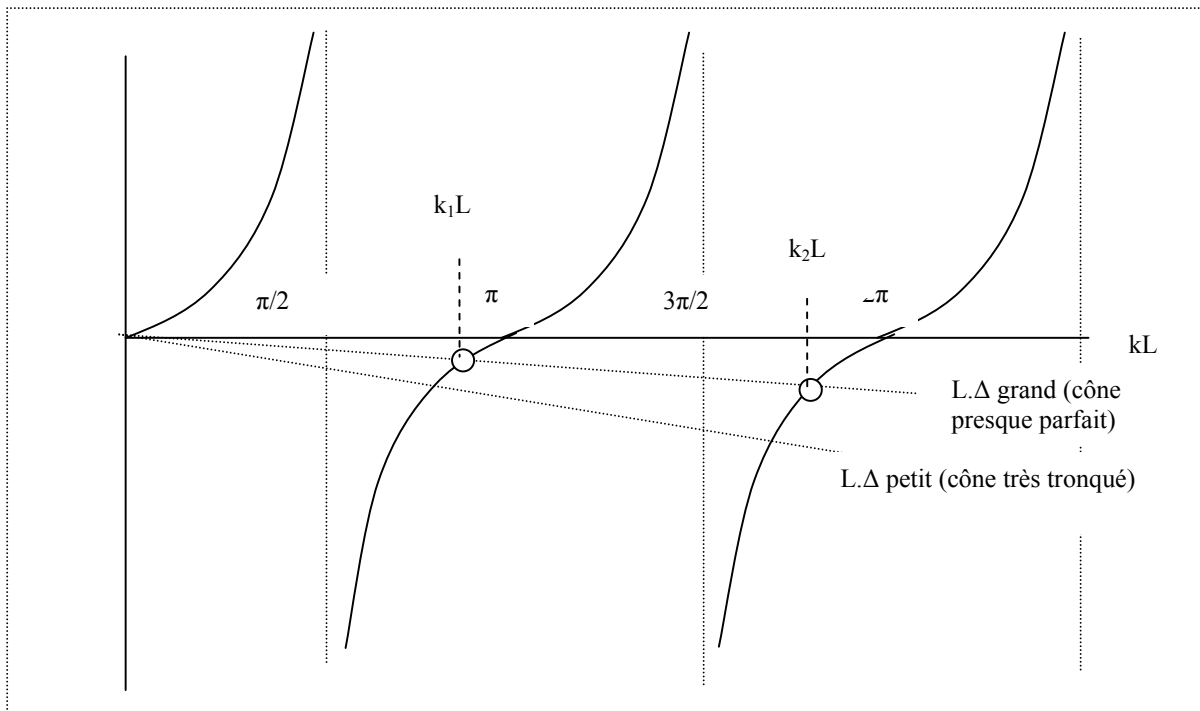


Figure 2. Résolution graphique de l'éq. 2 :  $\tan(kL) = -(kL)/(L\Delta)$ . Les solutions sont à l'intersection des courbes  $\tan(kL)$  et de la droite  $-(kL)/(L\Delta)$ . Pour un cône tronqué,  $k_2 > 2.k_1$ , de sorte que les octaves sont un peu trop grandes.

L'analyse ci-dessus montre que les colonnes d'air en forme de tronc de cône et fermées au petit bout ont des octaves un peu trop larges. L'ajout d'une cavité au bout du tuyau permet de rétablir la justesse de ces octaves. Elles sont presque justes si le cône est peu tronqué, et l'écart augmente avec la troncation. Cependant, comme on le verra par la suite, cet effet là peut être compensé par l'introduction d'un volume fermé au petit bout du tronc de cône.

#### **Influence d'une cavité au bout du tronc de cône :**

Sur les instruments à vent à perce conique, l'embouchure représente souvent une cavité au bout du tronc de cône (fig. 3). C'est le cas du bec des saxophones et de la cuvette des cornets à bouquin. Sur les hautbois et bassons, la cavité associée à l'anche double est assimilable au volume d'air compris entre les deux palettes. Elle est de forme complexe et son volume est plus faible, mais elle existe bel et bien. Comment cette cavité affecte-t-elle la hauteur du son ? Existe-t-il un volume de cavité qui rende le système harmonique ?

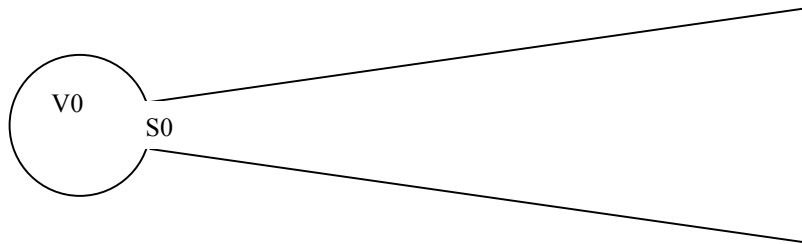


Figure 3. Tronc de cône avec une cavité représentant l'embouchure

Par chance, le système admet encore une solution analytique. L'équation aux pulsations propres du système « tronc de cône terminé par une cavité » est :

$$\tan(k.L) = -\frac{k.L}{L\Delta - \frac{V0}{S0.L}(k.L)^2} \quad (\text{eq. 3}), \text{ homologue de l'équation (2) avec un terme correctif au}$$

dénominateur pour tenir compte de la cavité.

Cette équation montre que la cavité abaisse les fréquences du tronc de cône (fig. 4).

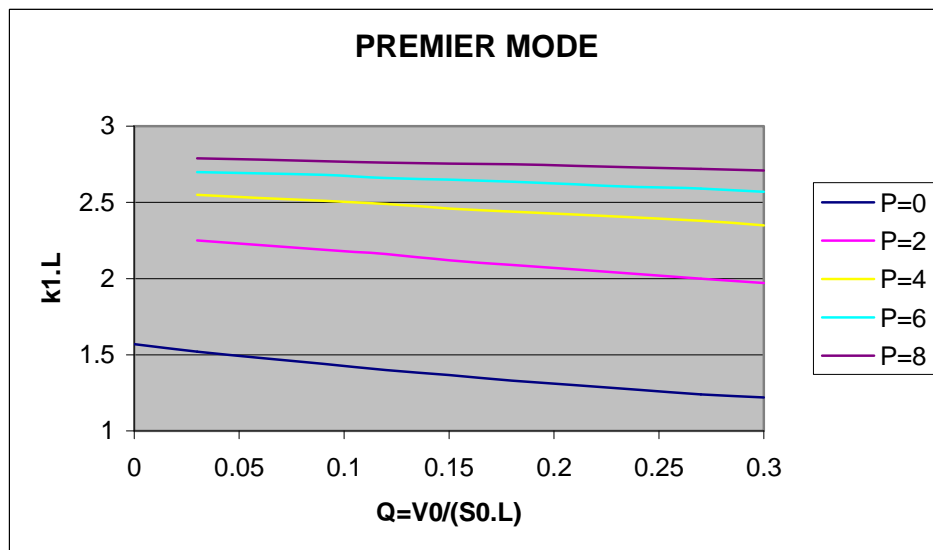


Figure 4. Fréquence (exprimée en unités de  $k*L$ ) du mode fondamental d'un tronc de cône fermé au petit bout par une cavité, en fonction des paramètres géométriques du système :  $P=L*\Delta$  et  $Q=V0/(S0*L)$ . Une augmentation du volume de la cavité cause un abaissement de la fréquence du fondamental.

L'abaissement induit par la cavité est moindre pour le fondamental que pour le 2<sup>nd</sup> mode (fig. 5), de sorte que les octaves se trouvent rétrécies par la cavité. Comme les octaves du tronc de cône pur tendent à être trop grandes, la cavité permet de corriger.

*On peut donc faire un instrument à octaves justes avec un tronc de cône terminé par une cavité. Quel est le volume idéal ?*

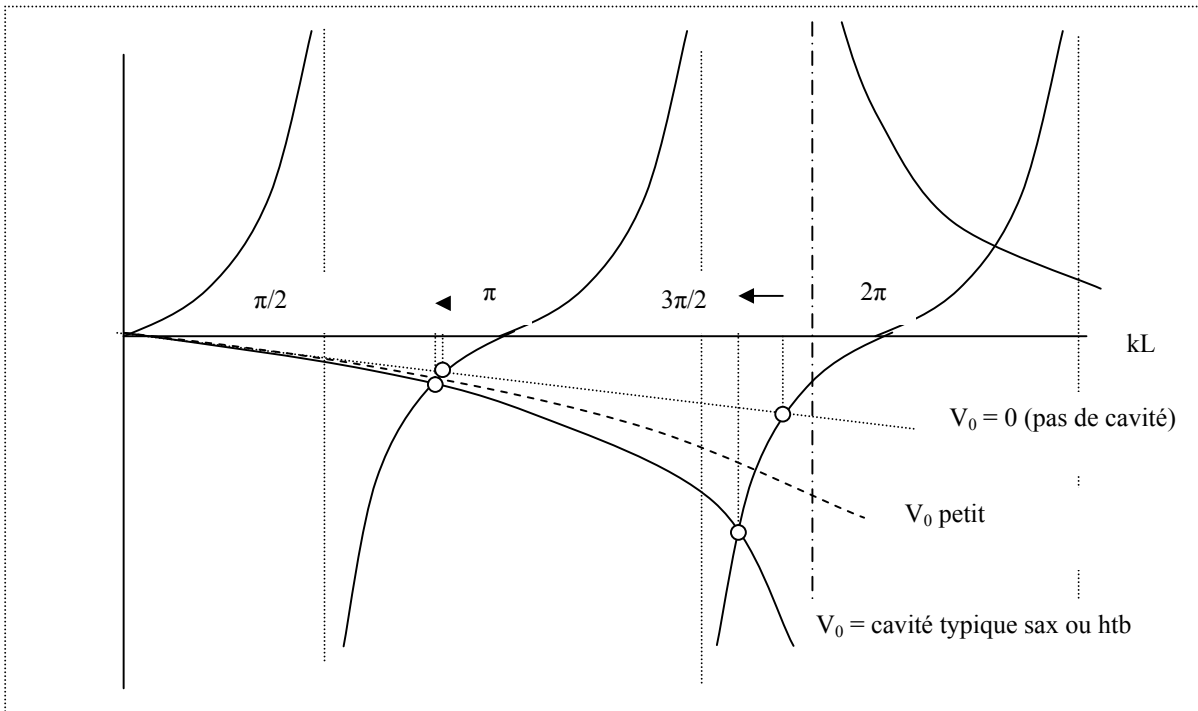


Figure 5. Résolution graphique de l'équation (3). Les solutions sont à l'intersection des courbes  $\tan(kL)$  et de la courbe  $-(kL)/(L\Delta - (V_0/S_0L) \cdot (kL)^2)$ . L'introduction d'une cavité au bout du tronc de cône abaisse la fréquence propre du mode 1 (un peu) et celle du mode 2 (beaucoup). Si le volume de la cavité est bien choisi, il est ainsi possible de rattraper l'inharmonicité due à la troncature du cône. Beaucoup d'instruments à anche utilisent cet effet pour assurer des octaves justes.

### Tronc de cône + cavité donnant des octaves justes

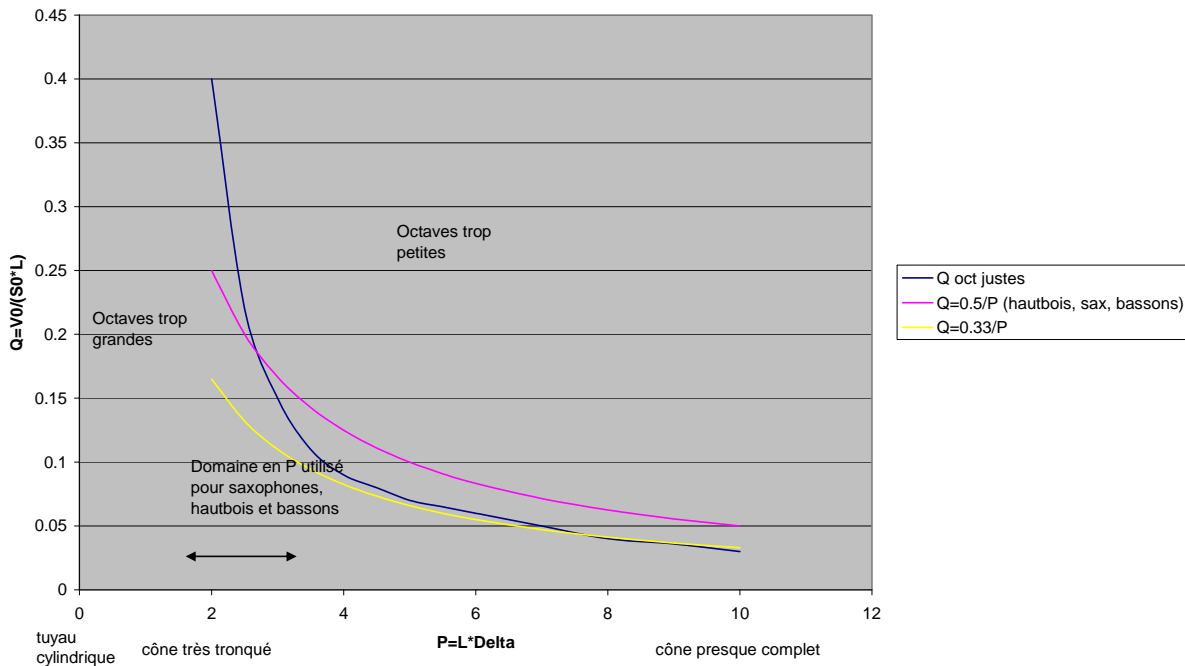


Figure 6. Ce graphe donne la largeur des octaves d'un tronc de cône fermé par une cavité, en fonction des proportions du résonateur. Les troncs de cône placés sur la courbe bleue ont des octaves justes.

Dans le cas d'un saxophone, hautbois ou basson, déboucher successivement les trous de jeu revient à diminuer  $L$  sans rien changer à  $\Delta$ ,  $V_0$  ou  $S_0$ , ce qui diminue  $P$  et augmente  $Q$  selon un arc d'hyperbole (représenté ici en rose pour hautbois et bassons). Si les valeurs de ces trois paramètres sont choisies selon la relation  $Q = 0.5/P$ , ou encore  $V_0 \cdot \Delta / S_0 = 0.5$ , l'hyperbole (courbe rose) peut être assez proche de la courbe d'octaves justes (bleue) pour une large gamme de valeurs de  $P$ , ce qui signifie que ces instruments (pour lesquels  $P$  varie entre 1.5 et 3 selon le doigté de la gamme) pourront avoir des octaves à peu près justes sur toute la gamme. Comme on le verra plus loin, hautbois, bassons et saxophones sont tous caractérisés par un produit  $P \cdot Q = V_0 / (S_0 \cdot R)$  de l'ordre de 0.5, représenté en rose sur le graphique.

Néanmoins, même avec le meilleur ajustement possible, le raisonnement ci-dessus prédit que pour un tronc de cône pur excité par une anche, on aura encore des octaves un peu trop petites dans le bas de la gamme et un peu trop grandes dans le haut. Heureusement, on peut montrer que la hauteur des cheminées latérales a une influence importante sur la largeur des octaves. Une cheminée haute réduit considérablement les octaves. En utilisant cet effet, il suffit de donner aux trous latéraux du haut de la gamme une hauteur de cheminée plus importante qu'aux trous latéraux du bas de la gamme pour obtenir des octaves justes sur toute l'étendue de l'instrument.

Autre option possible pour avoir des octaves justes sur un instrument tronconique à trous latéraux : travailler dans un autre domaine du diagramme : un instrument tronconique pour lequel le volume de la pointe tronquée du cône serait rassemblé dans une cavité à l'extrémité, suivrait la loi  $Q = 0.33/P$ . Un tel instrument aurait des octaves presque parfaitement justes dans une large gamme de valeurs de  $P$  (comprise entre 4 et 10), mais l'anche doit alors être très *petite et étroite*. J'ai essayé cette formule sur

un "saxophone" expérimental : ça marche du tonnerre, mais il y a du travail pour apprivoiser le timbre assez sauvage de l'instrument.

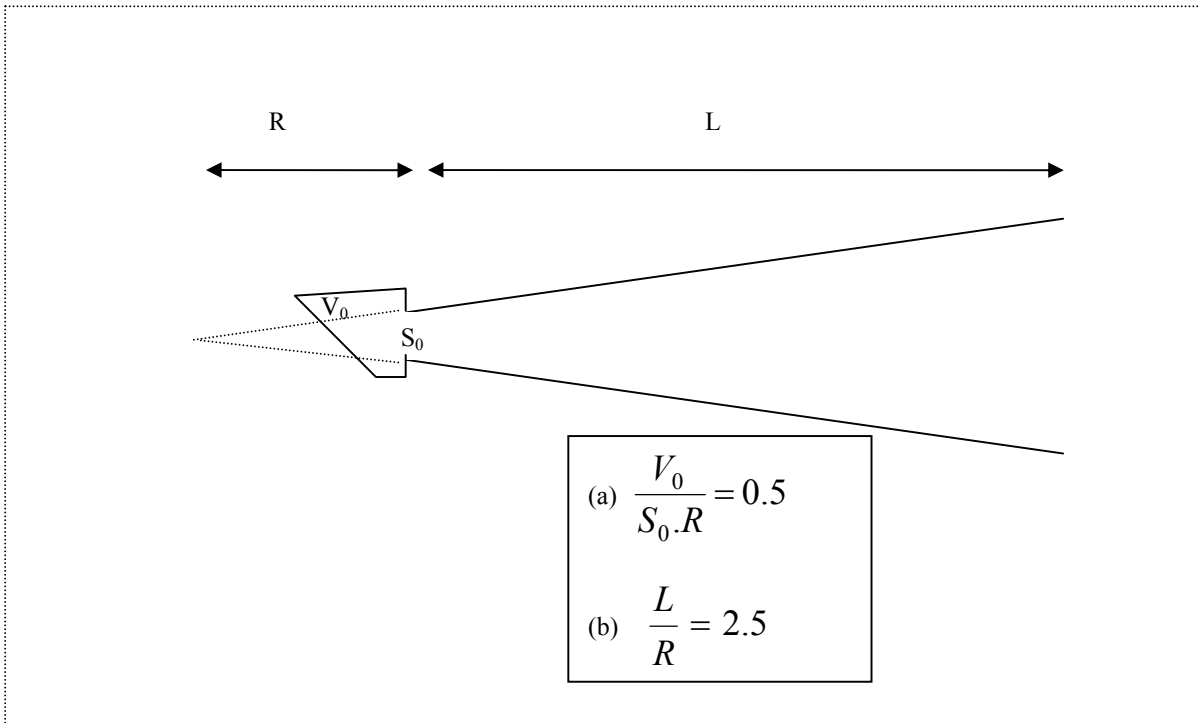


Figure 7 : Critères à respecter pour avoir des octaves justes avec un tronc de cône terminé par une cavité.

On déduit de tout cela un critère à respecter pour obtenir des octaves justes avec un instrument à anche (fig. 7) : le volume de l'embouchure doit valoir à peu près 1.5 fois le volume de la pointe du cône. Dans la pratique, le volume *géométrique* du bec de saxophone ou de l'air contenu dans une anche double est plus petit que cette valeur. Mais, comme on va le voir plus loin, le couplage à l'anche donne au bec du saxophone ou à l'anche double un volume *effectif* qui, ajouté au volume géométrique, respecte à peu près le critère (a) ci-dessus (cf tableau 3).

### Influence du couplage à l'anche sur les fréquences du tronc de cône pur

Si l'on conserve l'hypothèse des champs acoustiques sinusoïdaux donnés par l'équation (1), près du petit bout d'un tronc de cône ouvert au gros bout, on a une pression

$$p(0) = -ip_{acoust} \sin(kL).e^{i\omega t}$$

et un débit

$$w(0) = -\frac{P_{acoust} \cdot S_0}{\omega \cdot \rho_A} (k \cdot \cos(kL) + \Delta \cdot \sin(kL)) e^{i\omega t}.$$

En l'absence de couplage à l'anche, le fait que le tuyau soit fermé au petit bout impose  $w(0) = 0$  ; on retrouve alors l'éq. (2).

Avec couplage à l'anche, le débit d'air au niveau de l'anche n'est pas nul : il est dû au mouvement de la palette de l'anche, et à la différence de pression entre l'extrados et l'intrados de l'anche :

$w(0) = i \cdot A_A \cdot \omega \cdot a$  + termes aérodynamiques, où  $a$  est l'élongation du mouvement de l'anche et  $A_A$  la surface vibrante de l'anche. La pression acoustique et l'élongation de l'anche sont reliés par

$$p(0) \cdot A_A = -(K - M \cdot \omega^2) \cdot a, \text{ où } K \text{ est la raideur de l'anche et } M \text{ sa masse.}$$

Les termes aérodynamiques sont petits devant le débit d'air induit par le mouvement de la palette de l'anche. En les négligeant, on a donc :

$$k \cdot L \cdot \cos(kL) + \Delta \cdot L \cdot \sin(kL) = \frac{A_A^2 \cdot c^2 \cdot \rho_A}{S_0 \cdot L \cdot (K - M \cdot \omega^2)} \cdot (k \cdot L)^2 \cdot \sin(kL).$$

Avec une anche sans inertie ( $M=0$ ), cette équation aux pulsations propres se réduit à

$$\tan(k \cdot L) = -\frac{k \cdot L}{L \Delta - \frac{A_A^2 \cdot \rho \cdot c^2}{K \cdot S_0 \cdot L} (k \cdot L)^2} \quad (\text{eq. 4}).$$

Cette équation a la même forme que l'équation (3) obtenue plus haut pour les modes propres d'un tronç de cône fermé par une cavité ! Aux fréquences très inférieures à la fréquence propre de l'anche, le couplage à l'anche est donc formellement analogue à l'introduction d'une cavité en bout de tube, de volume

$$V_{eff} = \frac{A_A^2 \cdot \rho \cdot c^2}{K} = \frac{P_{atm} \cdot \gamma \cdot A_A^2}{K} \quad (\text{eq. 5}).$$

Ce résultat primordial a été initialement obtenu par J.C. Nederveen [1].

L'ordre de grandeur de ce volume effectif associé au couplage à l'anche est donné dans le tableau 1 ci-dessous : il est voisin de 1.2 cm<sup>3</sup> pour une anche de clarinette, de 1.8 cm<sup>3</sup> pour un saxophone alto, 1.2 cm<sup>3</sup> pour une anche de basson (moderne) et 0.27 cm<sup>3</sup> pour une anche de hautbois (baroque). Ajouté au volume géométrique de la cavité d'embouchure (fig. 8), ce volume effectif donne à la colonne d'air des fréquences passives égales aux fréquences en jeu du tronç de cône terminé par une anche.



	Surface vibrante estimée (m <sup>2</sup> )	K raideur de l'anche (N/m)	Volume effectif de l'anche (m <sup>3</sup> )
hautbois moderne	2.50E-05	8.33E+02	2.10E-07
hautbois baroque	2.91E-05	8.73E+02	2.72E-07
bombarde soprano en sib	2.30E-05	8.33E+02	1.78E-07
taille baroque en fa	3.65E-05	1.02E+03	3.67E-07
basson moderne	7.41E-05	1.25E+03	1.23E-06
basson baroque	8.00E-05	1.25E+03	1.43E-06
Sax sop	1.50 E-04	2400	1.30 E-06
Sax alto	1.80 E-04	2800	1.60 E-06
Sax ténor	2.50 E-04	3000	2.90 E-06
Clarinette	1.30 E-04	2000	1.20 E-06

Tableau 1 : Volume effectif associé au couplage à l'anche pour différents types d'embouchure d'instruments classiques.

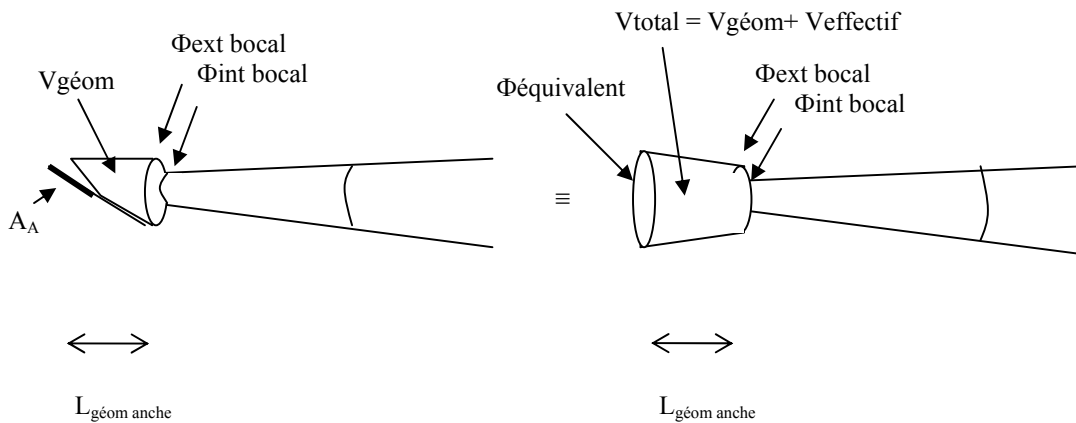


Figure 8 : Le système réel (à gauche) et sa représentation équivalente (à droite). Par convention on admet dans tout cet article que le volume de l'embouchure est mesuré entre la pointe et le raccordement au bocal de l'instrument (le bocal étant ici considéré comme faisant partie intégrante de la perce principale de l'instrument. Sur la figure, Phi bocal est donc le diamètre intérieur du petit bout du bocal).

Aux fins d'utilisation dans le logiciel Tutt [2], qui calcule les fréquences propres d'une colonne d'air connaissant sa géométrie, ce volume effectif a été converti dans le tableau ci-dessous en un diamètre effectif  $\Phi_{\text{équivalent}}$  de l'anche, en supposant que ladite anche garde sa longueur géométrique  $L_T$ , et se raccorde au bocal selon un diamètre égal au diamètre géométrique du bocal  $\Phi_{\text{ext bocal}}$  (à l'épaisseur de la paroi du bocal près).

	Volume effectif	Volume géom	Volume total c	Phi ext bocal	$L_T$ , longueur c	Phi équivalent
hautbois moderne	2.10E-07	1.19E-07	3.29E-07	2.60E-03	2.30E-02	5.74E-03
hautbois baroque	2.72E-07	1.85E-07	4.56E-07	3.15E-03	2.40E-02	6.50E-03
bombarde soprano	1.78E-07	1.93E-07	3.70E-07	3.65E-03	1.95E-02	6.09E-03
taille baroque	3.67E-07	2.44E-07	6.11E-07	3.35E-03	2.80E-02	6.98E-03
basson moderne	1.23E-06	5.66E-07	1.80E-06	4.35E-03	3.90E-02	1.05E-02
basson baroque	1.43E-06	7.43E-07	2.18E-06	4.75E-03	4.30E-02	1.09E-02
Sax soprano	1.30E-06	2.00E-06	3.30E-06	1.24E-02	3.10E-02	1.10E-02
Sax alto	1.60E-06	3.90E-06	5.50E-06	1.35E-02	4.30E-02	1.20E-02
Sax ténor	2.90E-06	5.70E-06	8.60E-06	1.50E-02	5.50E-02	1.35E-02
Clarinette	1.20E-06	1.90E-06	3.10E-06	1.25E-02	2.50E-02	1.25E-02

Tableau 2 : volume effectif de quelques embouchures d'instruments à anche typiques. Les trois dernières colonnes représentent les paramètres à rentrer dans le logiciel Tutt pour simuler l'anche par son volume total équivalent

Le modèle ci-dessus a été confronté à l'expérience, en mesurant les fréquences en jeu du fondamental de tuyaux cylindriques ou tronconiques de longueur variable, reliés à divers types d'anches de différentes surfaces. On constate que lesdites fréquences ne correspondent pas aux fréquences calculées pour un système passif dont les dimensions seraient les dimensions géométriques de la colonne d'air, sans correction associée au couplage à l'anche ; en revanche, le calcul avec le logiciel Tutt des fréquences passives d'un système équivalent où l'anche est remplacée par un volume total égal à son volume géométrique plus le volume effectif de l'eq. 5 selon le schéma ci-dessus, reproduit bien les fréquences mesurées (cf Figures 9-13 ci-dessous).

Bec de clarinette + tube diamètre 14.7 mm de longueur variable

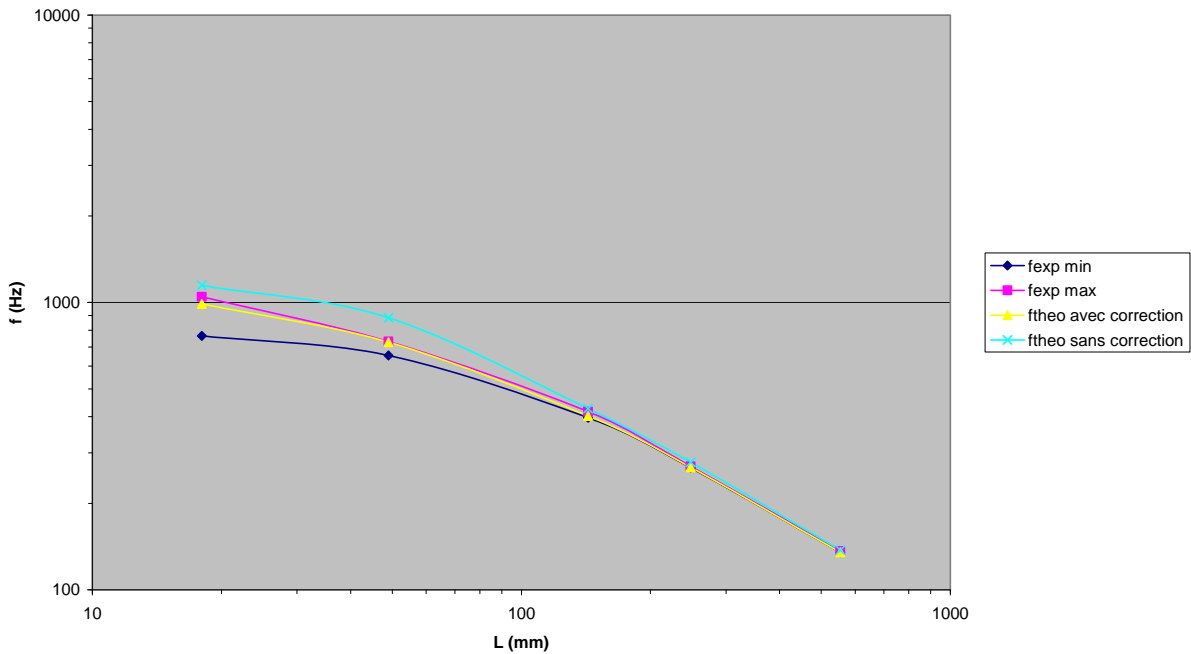


Figure 9 : Fréquence mesurée pour le fondamental d'un tuyau cylindrique de diamètre 14.7 mm excité par un bec et une anche de clarinette en sib. La mesure a été faite pour diverses longueurs  $L$  du tuyau,  $L$  étant mesuré depuis l'embranchement du bec jusqu'au bas du tuyau. La fourchette des mesures expérimentales donne les limites du champ de liberté en fréquence. La courbe théorique en bleu correspond à la fréquence calculée avec le logiciel Tutt pour un système passif dont les dimensions seraient les dimensions géométriques de la colonne d'air. Elle ne reproduit pas les résultats expérimentaux ; par contre, la courbe théorique en jaune, qui associe à l'anche un volume total égal à son volume géométrique plus le volume effectif de l'eq.(5), reproduit mieux les fréquences mesurées.

bec de clarinette + tube diamètre 10.3 mm de longueur variable

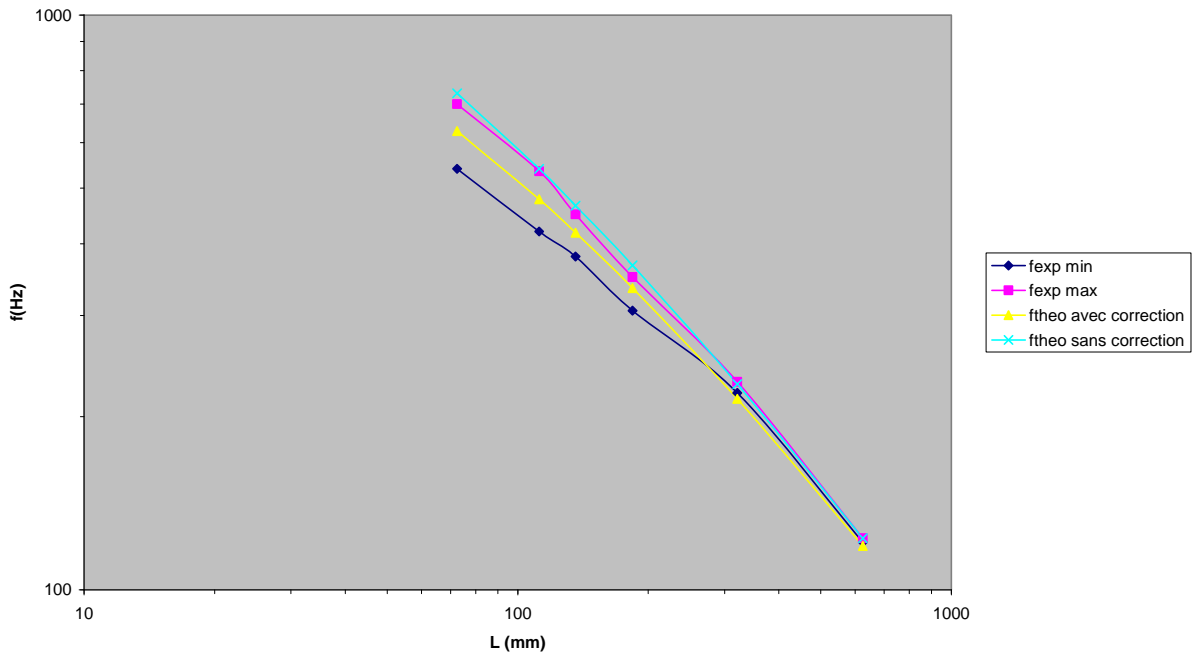


Figure 10 : fréquence mesurée pour le fondamental d'un tuyau cylindrique de petit diamètre (10.3 mm) excité par un bec et une anche de clarinette en sib. La mesure a été faite pour diverses longueurs  $L$  du tuyau,  $L$  étant la longueur totale du tuyau enfoncé de 45 mm à l'intérieur du bec. La fourchette des mesures expérimentales donne les limites du champ de liberté en fréquence. La courbe théorique en bleu correspond à la fréquence calculée avec le logiciel Tutt pour un système passif dont les dimensions seraient les dimensions géométriques de la colonne d'air. Elle ne reproduit pas les résultats expérimentaux ; La courbe théorique en jaune, qui associe à l'anche un volume total égal à son volume géométrique plus le volume effectif de l'eq.(5), est à l'intérieur de la fourchette des fréquences mesurées.

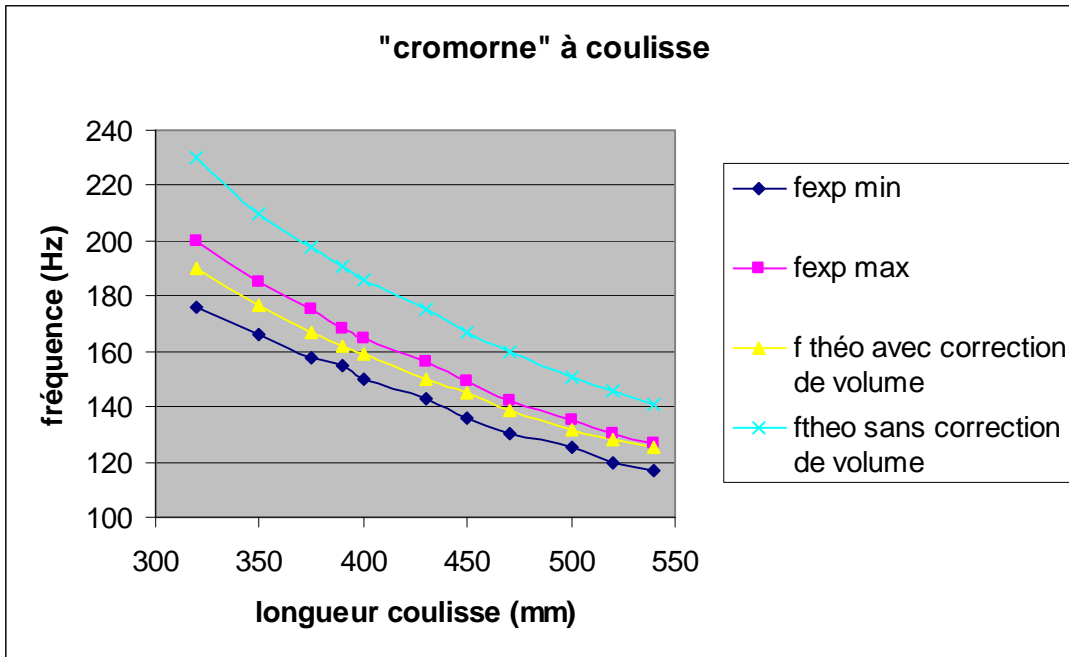


Figure 11: Fréquence mesurée pour le fondamental d'un tuyau cylindrique de diamètre 6 mm, largement fendu longitudinalement, et excité par une anche de basson connectée au tuyau par un court bocal tronconique. La mesure a été faite pour diverses positions de la coulisse recouvrant la fente du tuyau, c'est-à-dire en fait pour plusieurs longueurs du tuyau. La fourchette des mesures expérimentales donne les limites du champ de liberté en fréquence. Même légende que précédemment pour les courbes théoriques. Le calcul théorique avec correction de volume reproduit les résultats expérimentaux.

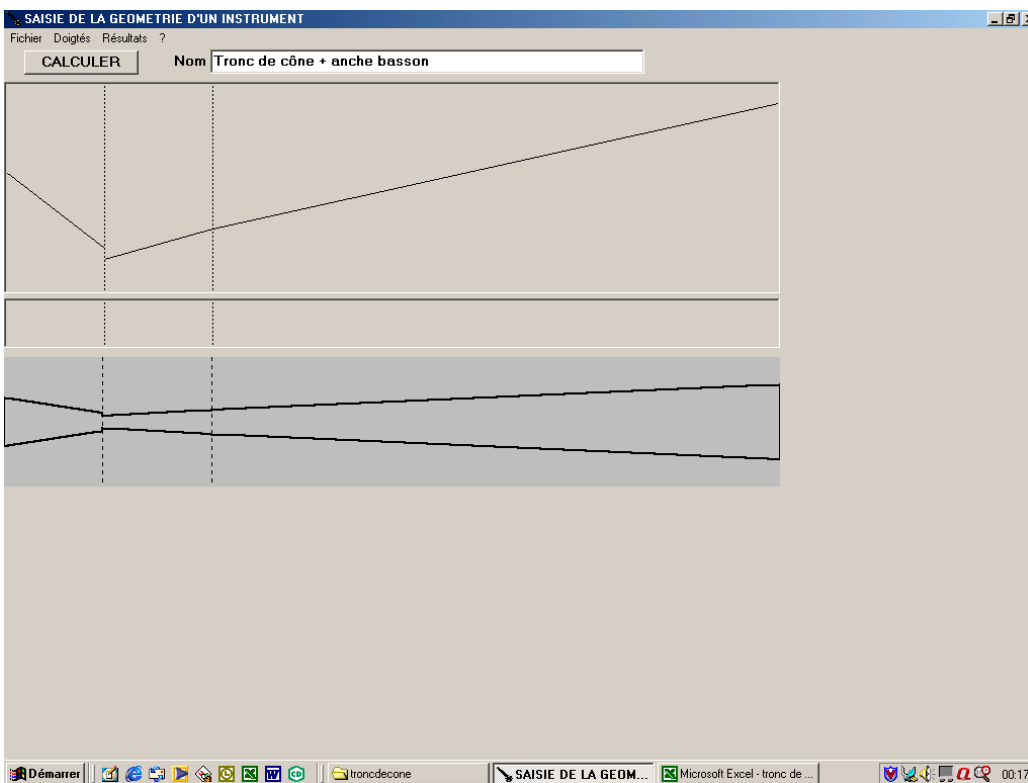
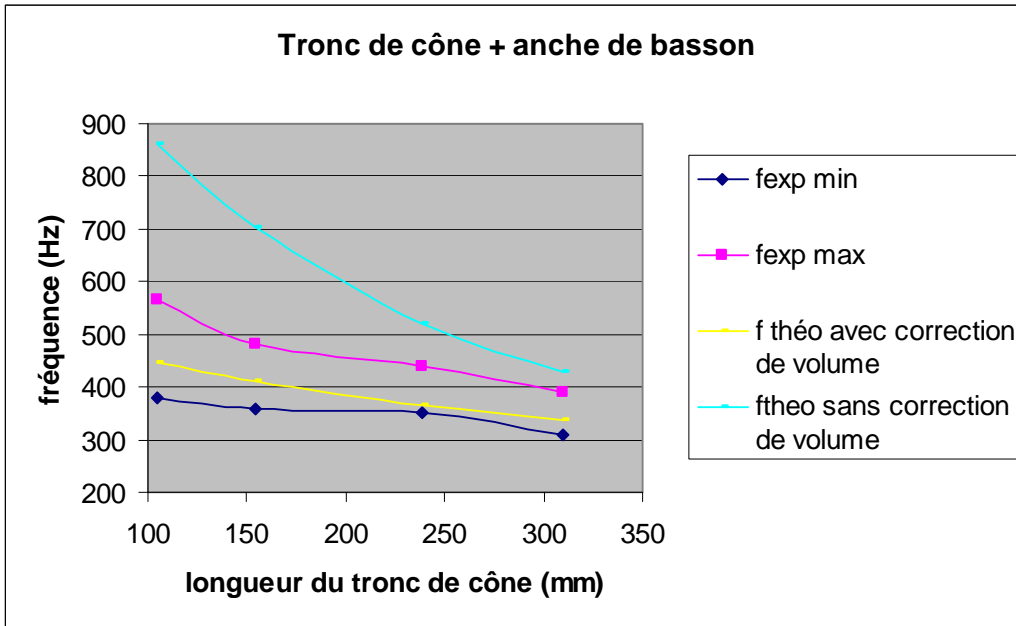


Figure 12 : fréquence mesurée pour le fondamental d'un tronc de cône excité par une anche de basson. La mesure a été faite pour diverses longueurs du tronc de cône, en raccourcissant le tuyau par son gros bout. La fourchette des mesures expérimentales donne les limites du champ de liberté en fréquence. Même légende que précédemment pour les courbes théoriques.

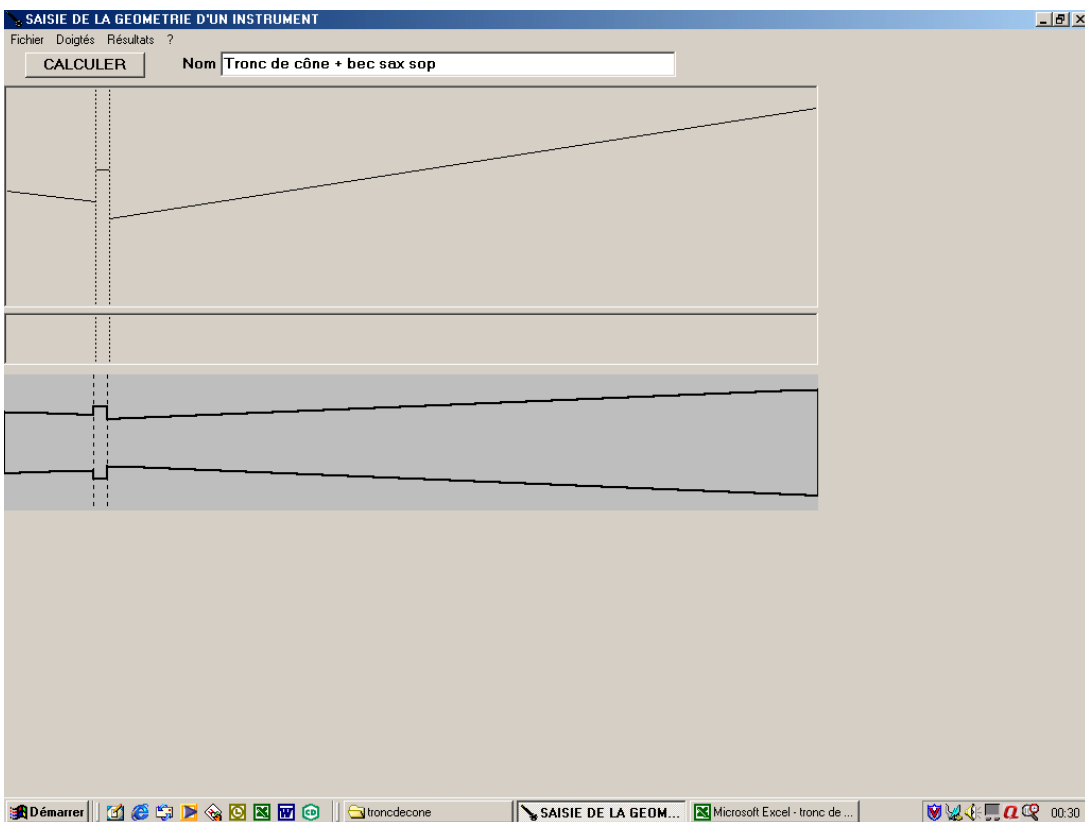
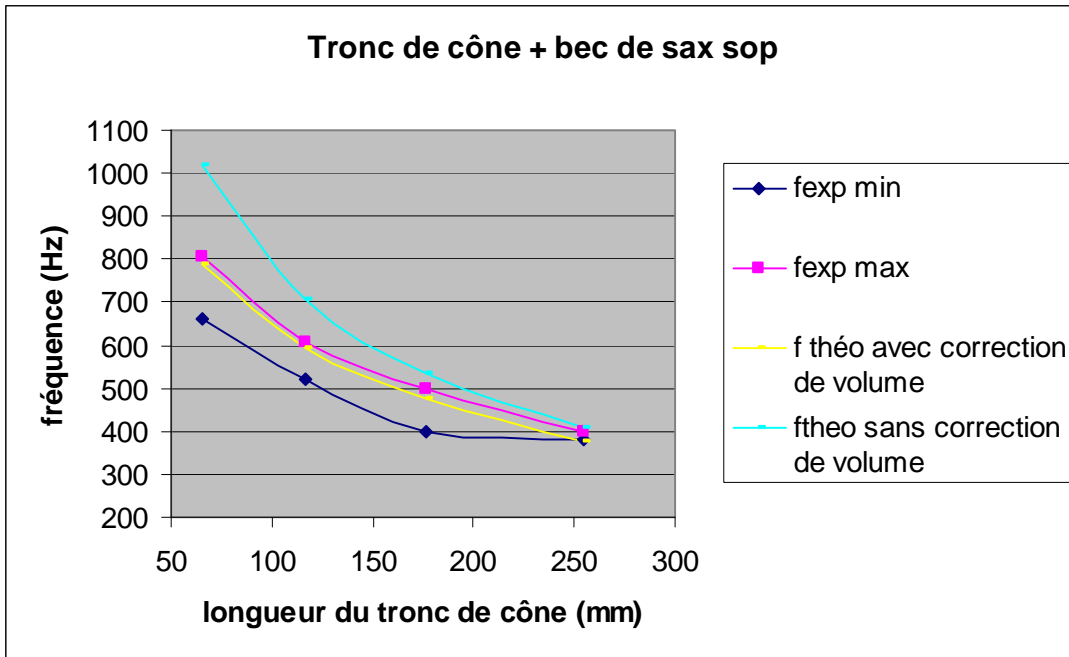


Figure 13 : fréquence mesurée pour le fondamental d'un tronc de cône excité par un bec et une anche de sax soprano. Même légende que précédemment.

Après ces quelques succès, le modèle ci-dessus a également été confronté à l'expérience via l'analyse acoustique de divers instruments à anche réels (clarinette, saxophone, hautbois, basson): le logiciel Tutt [1] échoue à reproduire leur justesse si on donne à l'instrument ses dimensions géométriques réelles. En revanche, le calcul avec le logiciel Tutt des fréquences passives d'un système où l'anche est remplacée par un volume total égal à son volume géométrique plus le volume effectif de l'eq. 5 selon le schéma (8) ci-dessus, reproduit bien les fréquences en jeu sur toute la tessiture de l'instrument (cf Figures 14-17).

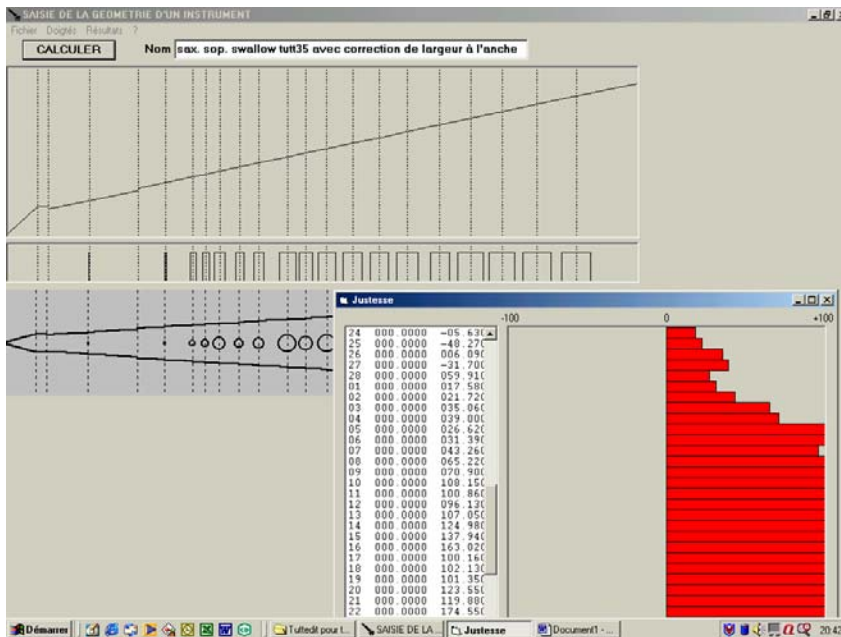


Figure 14 : Justesse calculée sans correction de volume au niveau de l'anche, pour un sax soprano, sur les différents doigtés de la tessiture. Le calcul des fréquences passives du système non corrigé prédit un instrument très faux, beaucoup plus haut qu'il ne l'est en réalité.



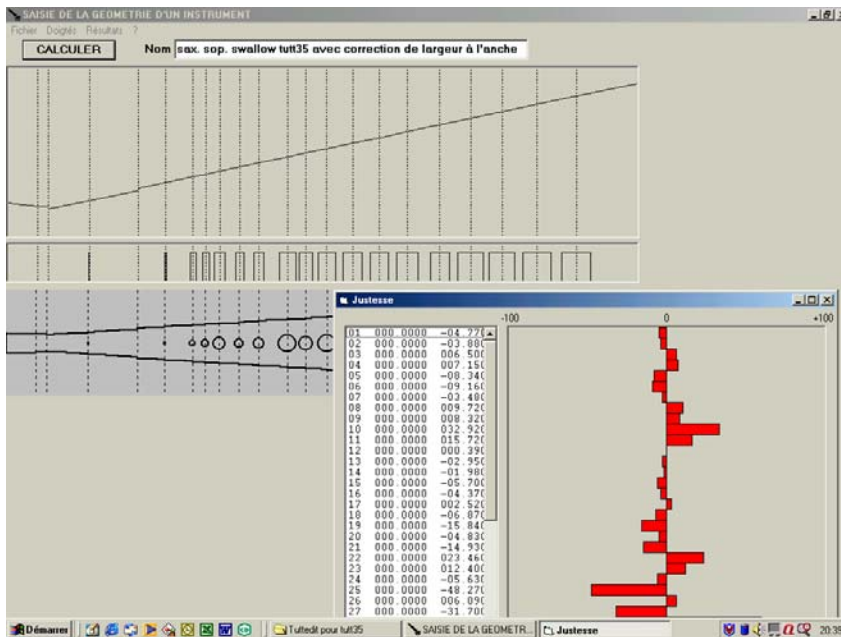


Figure 15 : Justesse calculée avec la correction de volume de l'eq.(5), c'est à dire avec 11 mm de diamètre effectif au bout de l'anche pour un sax soprano, sur les différents doigtés de la tessiture. La correction due au couplage à l'anche rétablit la justesse globale de l'instrument.

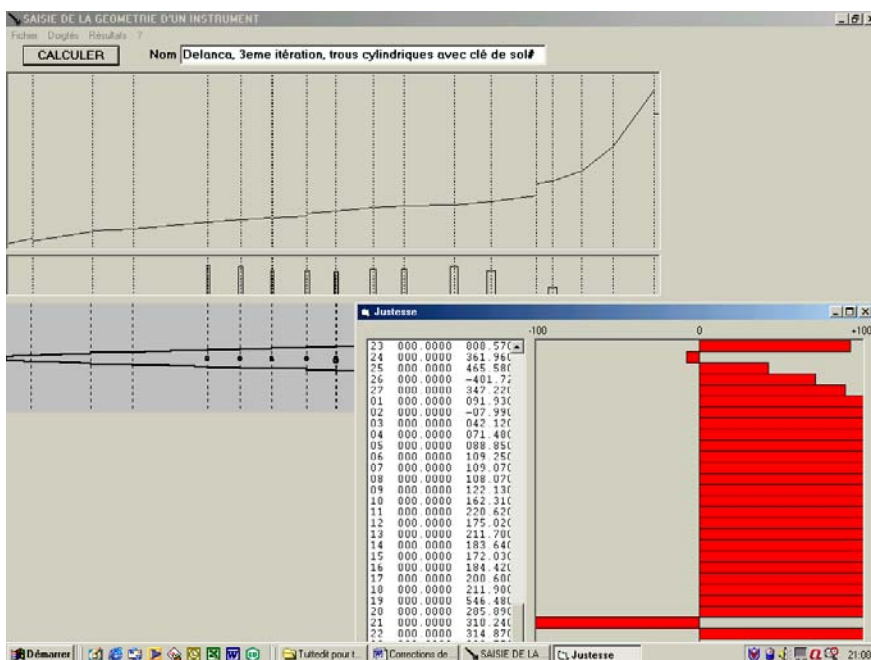


Figure 16 : Justesse calculée sans correction de volume au niveau de l'anche, pour un hautbois baroque, sur les différents doigtés de la tessiture. Le calcul des fréquences passives du système non corrigé prédit un instrument très faux, beaucoup plus haut qu'il ne l'est en réalité.

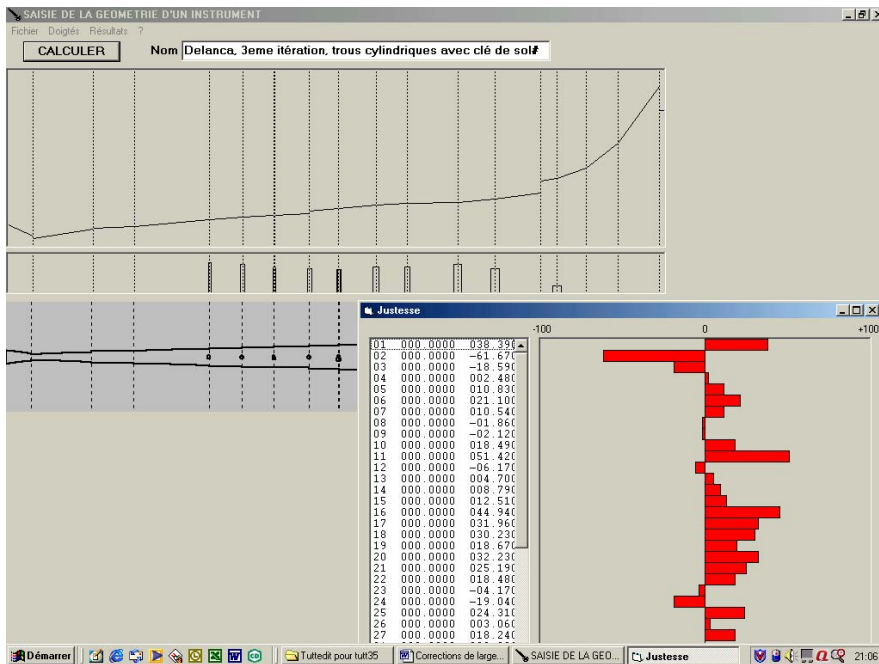


Figure 17 : Justesse calculée avec la correction de volume de l'eq (5), c'est à dire avec 6.5 mm de diamètre effectif au bout de l'anche pour un hautbois baroque, sur les différents doigts de la tessiture. La correction due au couplage à l'anche rétablit la justesse générale de l'instrument. Les imperfections de justesse restantes sont dues à d'autres causes, et sont d'ailleurs observées sur l'instrument réel.

Les considérations ci-dessus permettent peut-être de mieux comprendre comment fonctionnent les instruments à anche roseau : clarinette, hautbois, basson ou saxophones, qui tous doivent assurer l'harmonicité de leurs deux premiers modes de vibration, autant pour la justesse que pour le timbre et la facilité d'émission :

- Le basson et le hautbois sont des troncs de cône qui, s'ils étaient simplement fermés au petit bout, auraient des octaves beaucoup trop larges. Ils sont prolongés par une anche de volume intérieur faible, mais le couplage à l'anche vient augmenter ce volume. Est-ce suffisant pour assurer des octaves justes ? Pour le hautbois, la troncature du cône est de l'ordre de  $\Delta^{-1} = 15$  cm. Le volume d'air contenu dans l'anche est d'environ  $V_{\text{géom}} = 0.15 \text{ cm}^3$ , à quoi il faut ajouter un volume effectif  $V_{\text{eff}}$  associé au couplage à l'anche, de l'ordre de  $0.25 \text{ cm}^3$ . La surface de la perce au niveau de l'entrée du bocal est de  $S_0 = 0.04 \text{ cm}^2$  : le système a donc un ratio  $V_0/(S_0.R)$  voisin de 0.65. Le critère (a) est donc approximativement respecté, ce qui donne à l'instrument des octaves à peu près justes. Respect, Monsieur Hotteterre ! On peut faire une analyse similaire pour le basson (cf tableau 3 ci-dessous).
- Le saxophone possède un bec de volume intérieur plus important, en tout cas supérieur au volume de tronc de cône de même longueur qui prolongerait le corps de l'instrument (le tableau ci-dessous quantifie tout cela). L'espace entre le bout du bocal et la partie rétrécie du bec constitue sur les saxophones un volume supplémentaire qui n'existe pas sur les autres instruments à anche. Il est décrit séparément dans Tutt, et doit également être pris en compte

dans la présente analyse. Le couplage à l'anche vient encore augmenter le volume de cette cavité, suffisamment pour avoir  $V_0/(S_0.R)$  de l'ordre de 0.5, en accord avec le critère (a). Les octaves sont justes : chapeau, Monsieur Sax pour cette belle conception acoustique !

- La clarinette est un cas à part : on ne lui demande pas d'octavier, mais d'avoir son second partiel à la douzième. Avec sa perce cylindrique, elle possède un bec en sifflet, dont le volume intérieur est plus faible que celui d'un cylindre de même longueur, et du diamètre de la perce de l'instrument : la diminution de volume due au biseau est compensée par le volume effectif dû au couplage à l'anche. Cette compensation (de l'ordre de  $1.2 \text{ cm}^3$ , cf ci-dessus) transforme acoustiquement la clarinette en un cylindre quasi parfait, ce qui permet d'assurer une douzième juste. Bravo à Christoph Denner pour avoir conçu la forme de bec qui donne à la clarinette des partiels harmoniques !
- Le cromorne est un autre cas particulier : sur cet instrument à perce cylindrique étroite et à anche large, les partiels sont extrêmement inharmoniques et...tant pis ! Les cromornes ont de toute façon une tessiture réduite au mode fondamental du tuyau, et n'exploitent pas les partiels d'ordre supérieur.

	Volume total y compris (pour les sax) le volume* de l'espace entre le bout du bocal et la partie rétrécie du bec $V_{\text{total}} \text{ (m}^3\text{)}$	Diamètre bocal $\Phi_{\text{int bocal}} \text{ (m)}$	Section du bocal (côté tuyau) $S_0 \text{ (m}^2\text{)}$	Troncature du cône $\Delta^{-1}$ alias R (m)	Ratio $V_{\text{total}}/(S_0.R)$
hautbois moderne	3.29E-07	2.00E-03	3.14E-06	0.15	6.99E-01
hautbois baroque	4.56E-07	2.50E-03	4.91E-06	0.15	6.20E-01
bombarde soprano en sib	3.70E-07	2.50E-03	4.91E-06	0.1	7.55E-01
taille baroque en fa	6.11E-07	2.90E-03	6.60E-06	0.17	5.44E-01
basson moderne	1.80E-06	3.80E-03	1.13E-05	0.36	4.40E-01
basson baroque	2.18E-06	4.00E-03	1.26E-05	0.39	4.44E-01
Sax sop	3.3E-6+1.5E-6*	9.00E-03	6.36E-05	0.13	5.81E-01
Sax alto	5.5E-6+2.4E-6*	1.12E-02	9.85E-05	0.18	4.46E-01
Sax ténor	8.6E-6+3.2E-6*	1.25E-02	1.23E-04	0.24	4.01E-01
Clarinette	3.10E-06	1.47E-02	1.70E-04	infini	0

*Le tableau 3 ci-dessus permet de constater qu'en dépit de leur conception acoustique et de leurs dimensions géométriques très différentes, les instruments à anche ci-dessus respectent à peu de chose près le critère universel  $V_0/(S_0.R) = 0.5$  qui assure la justesse de leurs octaves. En fait, le critère n'est respecté qu'approximativement, car ces instruments ne sont pas des troncs de cône purs. La clarinette est à part. Rien d'étonnant : avec sa perce cylindrique, elle n'est pas conçue pour octavier, mais la forme et la dimension de son bec lui permettent de quintoyer.*

Comme on le voit, les solutions au problème de l'harmonicité des partiels sont très diverses suivant le type d'instrument !

### A la recherche de l'anche idéale

Plaçons nous maintenant du point de vue du musicien à la recherche d'une bonne anche pour son instrument. Revenons à l'équation (5) qui dit que le couplage à l'anche est équivalent à l'adjonction d'une cavité au bout du tube. Le volume de la cavité est

$$V_{eff} = \frac{P_{atm} \cdot \gamma \cdot A_A^2}{K} \quad (5),$$

où est la raideur de l'anche, définie ci comme le coefficient de proportionnalité entre la force appliquée sur la surface  $A_A$  de l'anche et le déplacement ( $a_0 - a$ ) du bout de la palette :

$$F = K \cdot (a_0 - a).$$

De nombreuses études antérieures ont montré que, pour que les autooscillations de l'anche aient lieu, la pression de bouche  $P_b$  doit être proche de celle nécessaire pour coller l'anche :

$$P_b = \frac{K \cdot a_0}{A_A} \quad (6),$$

où  $a_0$  est l'ouverture de l'anche au repos. L'équation (6) donne une expression pour  $K$ , qui, injectée dans l'eq. 5 donne

$$V_{eff} = \frac{P_{atm} \cdot \gamma \cdot A_A \cdot a_0}{P_b} \quad (7).$$

Cette équation est plus directement utilisable que l'eq. (5) car elle fait intervenir des grandeurs comme la pression de bouche  $P_b$  et l'ouverture de l'anche au repos, qui sont plus facilement accessibles que la raideur  $K$  de l'anche. D'autre part, cette pression de bouche est à peu près la même quel que soit l'instrument à anche envisagé (de l'ordre de 5000 Pa), ce qui simplifie pas mal l'analyse.

L'équation (7) est riche d'enseignements. Elle permet de retrouver ou de mieux comprendre beaucoup d'observations bien connues des instrumentistes :

-Une anche longue ou large (possédant donc une grande surface vibrante  $A_A$ ) est « basse », car son volume effectif grand fait baisser le diapason de l'instrument par rapport à celui qu'il aurait avec une anche de plus petites dimensions et de même ouverture. Les hautboïstes et les bassonistes, qui fabriquent leurs anches, savent bien que le diapason de leur instrument est très sensible à la dimension des dites anches : un demi millimètre en plus ou en moins fait déjà une différence considérable. Ils savent aussi qu'une anche "basse" est non seulement basse du point de vue du diapason global, mais aussi que ses octaves sont trop étroites. Ceci s'explique parfaitement par l'équation (7) : une anche "basse" est une anche dont le volume effectif est trop grand, ce qui fait baisser le diapason et rétrécit les octaves. Les hautboïstes ou bassonistes savent enfin qu'une anche large et courte peut avoir le même diapason qu'une anche longue et étroite. L'équation ci-dessus dit pourquoi : il suffit que la surface vibrante  $A_A$  soit la même pour les deux anches.

-Un grattage « long » augmente la surface vibrante  $A_A$  de l'anche, et fait donc augmenter  $V_{eff}$ . Le diapason de l'instrument baisse alors. C'est effectivement en allongeant le grattage d'une vieille anche de hautbois ou de basson devenue trop haute qu'on la ramène au diapason.

- Un grattage "à plat" donnera une surface vibrante plus importante qu'un grattage qui préserve du bois au centre. A dimensions transversales égales, les anches grattées à plat seront donc plus basses.

- Une anche très ouverte ( $a_0$  grand) sera basse pour au moins deux raisons : le volume géométrique de l'anche sera plus grand et le volume effectif (eq. 7) aussi. C'est pourquoi les anches neuves, qui tendent à être plus ouvertes que les anciennes, montent en vieillissant.

- Pour la même raison, le fait de «pincer» l'anche en jeu fait monter le son, à la fois parce que le pincement réduit l'ouverture de l'anche  $a_0$  et parce qu'il diminue la surface vibrante  $A_A$ .

-Enfin, augmenter la pression de bouche  $P_b$  diminue le volume effectif de l'anche, ce qui fait monter le son.

-Que faire d'une anche trop basse ? Comme on l'a vu, et comme les instrumentistes le savent bien, une telle anche a non seulement un diapason trop bas mais aussi des octaves trop étroites. Ces deux défauts sont souvent des défauts de jeunesse, qui s'atténuent avec le temps : il faut jouer l'anche, la roder jusqu'à ce qu'elle soit un peu plus fermée, ce qui diminue son volume effectif. Si l'anche reste trop basse le défaut peut encore être soigné (quoique imparfaitement) en tronquant le tube, au moyen d'un bocal plus court. On peut aussi corriger une anche trop basse par un moyen efficace, quoique peu orthodoxe : réduire la surface vibrante en raidissant l'anche près de sa base. Réciproquement, une anche trop haute devra être utilisée avec un bocal long, ou regrattée près de sa base pour augmenter sa surface vibrante.

Tout ceci ne révolutionnera pas le petit monde des anches, mais il est au moins satisfaisant d'avoir compris un peu mieux le fonctionnement de ces objets capricieux !

## **Remerciements**

Un grand merci aux amis de l'Afreubo pour avoir prêté leurs instruments pour les expériences décrites dans cet article.

## **Références**

[1] J.C. Nederveen, « Acoustical aspects of woodwind instruments », Northern Illinois University Press

[2] « Simulation de l'acoustique d'un instrument à vent : le logiciel Tutt », <http://la.trompette.free.fr/Ninob/Ninob.php>